

ヨー共振モードについての基礎的研究  
(ヨー共振モードの車速による変化)酒井 英樹\*<sup>1</sup>Fundamental study on yaw resonance mode  
(Change in yaw resonance mode depending on vehicle speed)Hideki SAKAI\*<sup>1</sup><sup>1</sup>Kindai Univ. Dept. of Robotics Engineering

1 Umenobe, Takaya, Higashihiroshima-shi, Hiroshima 739-2116, Japan

Received: 20 February 2021; Revised: 31 March 2021; Accepted: 7 May 2021

## Abstract

This paper starts with describing a method of deriving the resonance mode of a pendulum utilizing its equation of motion. Its resonance mode is that the particle accelerates toward the equilibrium position in the vertical plane including its fixed point. Therefore, a resonance mode can be derived by finding its equilibrium position and something to accelerate from its equation of motion. To derive the yaw resonance mode, the former paper transformed the equation of motion of vehicles into a structure that matches the equation of motion of the pendulum by assuming a special vehicle speed. This paper derives the yaw resonance mode at general velocities by modifying the variables that satisfy the configuration of the equation of motion derived in the former paper. As a result, this paper found that the yaw resonance equilibrium position is on the vehicle speed vector at the position where the side slip angle of the vehicle body is 0 in a steady state turning. This paper also found that something that accelerates towards equilibrium is the rear wheel. This acceleration of the rear wheels toward this extension is the restoration of yaw resonance.

**Keywords :** Yaw, Resonance, Natural frequency, Mode, Transient behavior, Yaw natural frequency

## 1. 緒 言

市場における操縦安定性の競合領域の一つである「操縦性の気持ちよさ」の一つに「リヤの収まり」があると指摘される(酒井, 2020)。これは、インパルス的な操舵後の車両挙動について、「フロントを軸にした、振子のようなリヤの回転運動」(大意)と土屋が指摘する現象である(Best MOTORing, 2020)。このようなドライバの観察結果を設計に反映させることが、より気持ちよい操縦性の車両を開発するために有効であると思われる。そこで著者は、ヨー共振モードが、前輪を軸に後輪が回転するモードであることを導いた(酒井, 2018)(これを以後、前報と呼ぶ)。ヨー共振モードは、土屋の指摘する“フロントを軸にした、振子のようなリヤの回転運動”と整合するので、この現象についてのドライバの観察結果の設計反映が期待される。ただし前報では、ヨー共振モードの導出に際し、①特定の車速(と②現実の範囲内の特定のヨー慣性モーメント)を仮定しているため、ヨー共振モードに関するドライバの観察結果の設計反映が可能なのは、特定の車速付近においてのみであった。

そこで、本論文は、より広い車速域において、ドライバの観察結果をより設計に反映しやすくするために、前報で仮定した①特定の車速の制約を外し、一般的な車速におけるヨー共振モードを導出する。なお、②ヨー慣性モーメントは、前報と同じ仮定をする。

本論文の構成は次の通りである。まず第2章で、共振モードと運動方程式との関係を確認し、それに準じた、ヨー共振モードを示唆する運動方程式の「形式」を第3章で述べる。ここまでは前報の知見であり、第4章では、この「形式」を満たすように、平面2自由度の変数を変換することによって、一般的な車速におけるヨー共振を

示唆する運動方程式を導出する。この運動方程式を基に、一般的な車速におけるヨー共振モードを第5章で考察する。

## 2. 共振モードと運動方程式との関係

この章では、ヨー共振を見出すための準備として、(単)振子を例に、共振と運動方程式との関係について、前報の要点を述べる。振子のモデルを図1(A)に示す。ここで $\theta$ は釣合位置からの振子の角度を、 $L$ は振子の長さを、 $M$ は質点の質量を、 $g$ は重力加速度を、それぞれ表し、それらの向きは反時計回りを正とする。 $\sin\theta \approx \theta$ とみなせるとき、この系の運動方程式は周知のように、

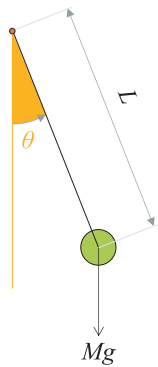
$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta \tag{1}$$

と表すことができる。ここで、 $\ddot{\theta}$ は振子の角加速度、 $\dot{\theta}$ は振子の角速度である。

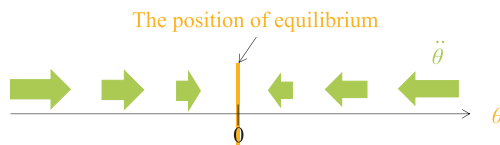
この式は、少なくとも次の三つを示唆する；1) 右辺の物理量が0のところ( $\theta=0$ )に釣合位置がある、2) 釣合位置からの変位( $\theta$ )に比例して、加速度( $\ddot{\theta}$ )が生じる、3) 負号(-)のため、加速度の向きは、変位と逆方向にある釣合位置に向く。

1)~3)を模式化したものを図1(B)に示す。図1(B)における矢印は、釣合位置に向かって見えるので、中心力と呼ばれ、中心力による運動を「復原」と呼ぶことにする(「復元」と書く書籍もある)。図1(B)に示される「釣合いの位置」と「復原するもの」のことを本論文では「共振モード」と呼ぶ。釣合位置は式(1)の右辺の変数が、復原は左辺の変数と右辺の負号が示唆するので、負号に注目して、式(1)に準じた形式の運動方程式を見つけることができれば、釣合位置や復原するもの、つまり共振モードが分かるはずである。

式(1)のブロック線図を図2に示す。図2の特徴は、直列に配置された積分と、負号を含むブロックである。これが、図1の共振モードを示唆するブロック線図である。



(A) Model



(B) Concept of resonance

Fig.1 A pendulum.

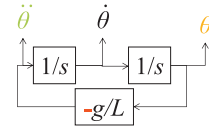


Fig. 2 A block diagram of the pendulum; the two integrals are located in series. Further, a negative gain exists.

## 3. ヨー共振を表す運動方程式の形式

この章では、ヨー共振を見出せる、運動方程式の形式について、前報の知見を簡潔に述べる。

### 3・1 重心の2自由度で表した運動方程式

図3に車両モデルを示す。このモデルは、ヨー角速度 $r$ と重心位置車体横滑り角 $\beta$ の2自由度によって記述される線形モデルである(酒井, 2015)。

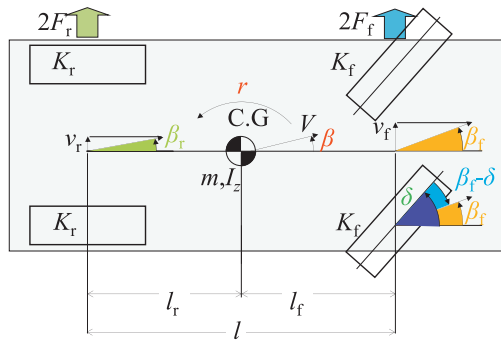


Fig. 3 A standard vehicle model; planar 2.D.O.F motion are represented by  $r$  and  $\beta$ .

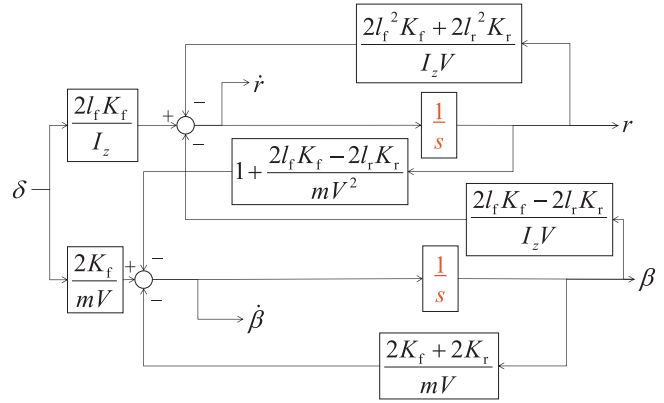


Fig. 4 Block diagram of a standard vehicle model; unlike Fig. 2, the two integrals are located in parallel.

ここで、車両質量を  $m$ 、ヨー慣性モーメントを  $I_z$ 、前輪と重心との距離を  $l_f$ 、後輪と重心との距離を  $l_r$ 、ホイールベースを  $l$ 、前輪位置車体横滑り角を  $\beta_f$ 、後輪位置車体横滑り角を  $\beta_r$ 、車速を  $V$  (一定) と記す。次に、旋回半径はトレッドよりも十分大きいと仮定して、トレッド 0、つまり前後それぞれの左右輪が車両中心線上にあるとする。また、前輪コーナリングパワを  $2K_f$  ( $>0$ )、後輪コーナリングパワを  $2K_r$  ( $>0$ )、前輪コーナリングフォースを  $2F_f$ 、後輪コーナリングフォースを  $2F_r$  と記す。最後に、オーバーオールステアリングギヤ比を 1 と仮定し、舵角を  $\delta$  と記す。このモデルの並進と回転についての運動方程式はそれぞれ次式によって表される。

$$mV(r + \dot{\beta}) = 2F_f + 2F_r \quad (2)$$

$$I_z \dot{r} = 2l_f F_f - 2l_r F_r \quad (3)$$

次にコーナリングフォースについて述べる。コーナリングフォースは、コーナリングパワとタイヤスリップ角との積である。タイヤのスリップ角は、タイヤ中心面から見たタイヤの進行方向の角度であり、その符号は反時計回りを正とするので、図 3 に示されるように、前輪のタイヤスリップ角は  $\beta_f - \delta$ 、後輪のタイヤスリップ角は  $\beta_r$  である。コーナリングフォースの符号は、コーナリングパワを正の値で定義したため、タイヤスリップ角の符号と逆になる。したがって前後輪のコーナリングフォースはそれぞれ次式で表される。

$$2F_f = -2K_f(\beta_f - \delta) \quad (4)$$

$$2F_r = -2K_r\beta_r \quad (5)$$

ここで、 $\beta_f$  と  $\beta_r$  はそれぞれ次式で表される。

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V}r \quad (6)$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V}r \quad (7)$$

式(2)~(7)がこのモデルの運動方程式である。そのブロック線図を図 4 に示す。図 2 では、積分が直列に配置されているのに対して、図 4 では並列である。したがって、この車両モデルは、共振モードが陽ではない。

### 3・2 積分が直列化された運動方程式の形式

図 4 では、 $\delta$  が生じた瞬間、 $\beta$  と  $r$  が同時に発生する。これらが積分されて、 $r$  と  $\beta$  になるから、積分が並列に配置される原因は、 $\delta$  が生じた瞬間に  $\dot{\beta}$  と  $\dot{r}$  とが同時に発生することである。両者が同時に発生するのは前輪か

ら重心までのオフセット ( $l_f$ ) のためである。なぜなら、操舵によって生じた  $2F_f$  が車体に加わると、横加速度  $V(\dot{\beta}+\dot{r})$  が発生するだけでなく、重心から前輪までのオフセットによって、 $\dot{r}$  も発生するからである。

したがって積分の並列配置を避けるためには、オフセットを 0 にする必要がある。そうすれば、 $2F_f$  が生じた瞬間に発生するのは加速度だけになる。そこで、前輪位置および後輪位置における車体の並進運動に注目する。それが図 5 のモデルである。このモデルでは、 $m$  と  $I_z$  からなる車両の剛体を、質量  $m_f$  なる前軸上の質点と、質量  $m_r$  なる後軸上の質点との 2 質点で表現してある。ここで  $m_f$  と  $m_r$  は、前後荷重配分比から次式で規定される。

$$m_f = \frac{l_r}{l} m \quad (8)$$

$$m_r = \frac{l_f}{l} m \quad (9)$$

また、図 5 のモデルが成立するための  $I_z$  は

$$I_z = l_f^2 m_f + l_r^2 m_r = l_f l_r m \quad (10)$$

である。 $I_z$  の実測値は、 $I_z/(l_f l_r m) = 0.85 \sim 1.05$  と指摘されている(北浜, 酒井, 1999)。上式(10)は、 $I_z/(l_f l_r m) = 1$  なので、この実測値の範囲内にある。したがって、式(10)は現実の範囲内の仮定である。

ここで、積分の直列化からは話が逸れるが、表記をより簡潔にしておく。定常円旋回を考えてみると、定常円旋回とは、定常円の接線方向に一定速度で進みながら、旋回中心に向かって加速し続ける現象である。この(横)加速度は、 $m_f$  や  $m_r$  に依存しないのに対して、 $2F_f$  や  $2F_r$  は  $m_f$  や  $m_r$  に依存してしまう。そこで、コーナリングフォースよりも、加速度のほうがより本質的な物理量と考えて、 $2F_f$  や  $2F_r$  を加速度次元で表すことにする。そのために、 $2K_f$  と  $2K_r$  を、 $m_f$  と  $m_r$  それぞれで割って、

$$C_f = \frac{2K_f}{m_f} \quad (11)$$

$$C_r = \frac{2K_r}{m_r} \quad (12)$$

と記す。 $C_f$  や  $C_r$  は、それぞれ加速度次元のコーナリング係数である(酒井, 2015)。 $m_f$  や  $m_r$  の大小にかかわらず、 $C_f$  の目安は 100,  $C_r$  の目安は 200[m/s<sup>2</sup>]程度と指摘されている(北浜, 酒井, 1999)。

話を積分の直列化に戻す。平面の 2 自由度を表す変数  $r$  と  $\beta$  の代わりに、 $2F_f$  とのオフセットが 0 である運動変数  $\beta_f$  と、 $2F_r$  とのオフセットが 0 である運動変数  $\beta_r$  を用いることにする。 $r$  や  $\beta$  を消去する準備のために、式(6)~(7)を  $r$  と  $\beta$  について解くと

$$r = \frac{V}{l} (\beta_f - \beta_r) \quad (13)$$

$$\beta = -\frac{l_r \beta_f + l_f \beta_r}{l} \quad (14)$$

となる。式(2)~(7)を、式(8)~(14)の関係を使って整理すると、

$$\dot{\beta}_f = -\left(\frac{C_f}{V} + \frac{V}{l}\right) \beta_f + \frac{V}{l} \beta_r + \frac{C_f}{V} \delta \quad (15)$$

$$\dot{\beta}_r = -\frac{V}{l} \beta_f - \left(\frac{C_r}{V} - \frac{V}{l}\right) \beta_r \quad (16)$$

となる。式(15)~(16)のブロック線図を図 6 に示す。図 6 は、図 2 と同様に積分が直列に配置されるようになった。なお、本論文独自の式(15)~(16)の導出方法を付録 A1 に記してある。この方法は、上記よりも計算量がより少なく、式(15)~(16)の各項の由来も分かる。

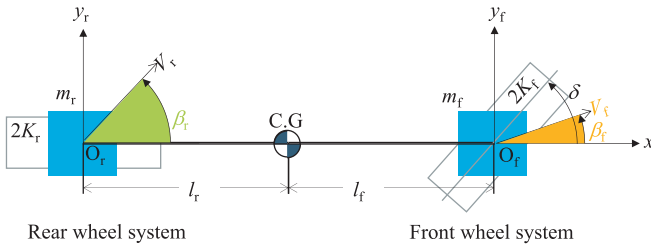


Fig. 5 Vehicle model represented by front wheels and rear wheels.

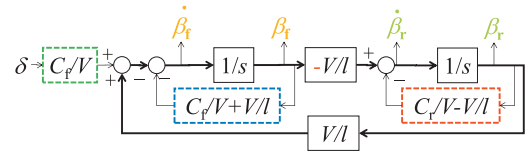


Fig.6 Block diagram of the vehicle model represented by the front and rear wheels: The two integrals are located in series, as in Fig. 2.

### 3・3 積分が直列化された運動方程式とヨー共振モードとの関係

図 6 を，図 2 に準じた形式により近づけるためには，図 6 中の緑や青，赤のブロックを消去する必要がある．まず，赤のブロックを消去するために，式(16)の右辺 ( ) の項を 0 にする．そのための  $V$  として，

$$V = \sqrt{lC_r} \tag{17}$$

を仮定する．この  $V$  は， $C_r=200[\text{m/s}^2]$ ， $l=2.5[\text{m}]$  のとき， $22.4[\text{m/s}]$  (約 80km/h) である．

式(17)を式(16)に代入すると，

$$\dot{\beta}_r = -\frac{V}{l}\beta_f \tag{16'}$$

となる．上式(16')と式(15)との組合せが，式(10)と式(17)の 2 つを仮定したときの運動方程式である．式(15)，(16')のブロック線図を図 7(A)に示す．図 7(A)の形式をより図 2 に近づけるため，図 7(A)中の緑と青のブロックを消去する．図 7(A)の緑と青のブロックは，式(15)の右辺第 1 項と第 3 項にそれぞれ相当するから，第 1 項と第 3 項との和が 0 になる  $\delta$  として，

$$\delta = \frac{V}{C_r} \left( \frac{C_r}{V} + \frac{V}{l} \right) \beta_f \tag{18}$$

の操舵を仮定する．これは， $\beta_f$ か $\beta_r$ のうち，少なくとも 1 つは 0 でないとの初期条件から，式(18)に基づいて， $\beta_f$  を  $\delta$  にフィードバックする操舵である．式(18)を式(15)に代入すると，

$$\dot{\beta}_r = \frac{V}{l}\beta_r \tag{15'}$$

となり，緑と青のブロックは消去される．上式(15')と式(16')との組合せが，式(10)と式(17)，式(18)の 3 つを仮定したときの運動方程式である．

式(15')～(16')のブロック線図を図 7(B)に示す．図 7(B)が，図 2 に準じた，積分が直列配置された形式であり，負号の位置は図 2 に揃えてある．両図の比較から，振子の釣合位置  $\theta$  に対応するのが  $\beta_f$  だから，ヨー共振の釣合位置は  $\beta_r=0$  であり，復原するものを表す  $\ddot{\theta}$  に対応するのは  $\beta_r$  だから，後輪が復原することが示唆される．

後輪が釣合位置  $\beta_r=0$  にある状態を図示したものが図 8(B)である．このように前輪位置の速度ベクトル  $V_f$  の延長線上に後輪があるのが，釣合位置  $\beta_r=0$  の意味である．逆に， $V_f$  の延長線上に後輪がない図 8(A)，(C)は，釣合位置にない．したがって，図 8(A)，(C)から， $V_f$  の延長線上に向かって後輪が加速して，図 8(B)の状態になることが復原であり，これが，式(10)と式(17) の条件下でのヨー共振モードである．「後輪が加速して」と述べたが， $\dot{\beta}_r$  は角速度の次元なので，加速には見えないかもしれない．しかし，図 5 の  $y_r$  軸方向の速度を  $v_r$  とすれば， $\beta_r = v_r/V$  だから， $\dot{\beta}_r = \dot{v}_r/V$  となるので，後輪は， $y_r$  軸方向に  $\dot{v}_r$  で加速する．なお，重心位置はヨー共振モードに影響しない．

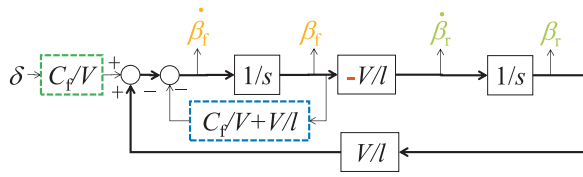


Fig. 7(A) Block diagram of the vehicle model represented by the front and rear wheels under the assumptions of eqs. (10) and (17).

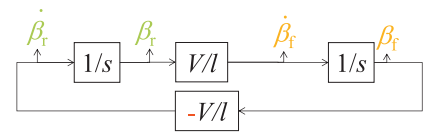


Fig. 7(B) Block diagram of yaw resonance under the assumptions of eqs. (10), (17) and (18): This block diagram has a same construction as in Fig. 2.

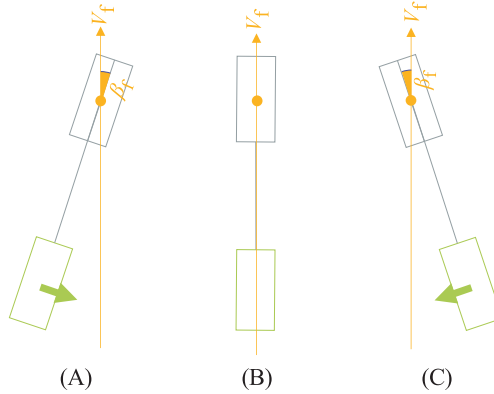


Fig. 8 Mode of yaw resonance at  $V = (lC_r)^{1/2}$ .

#### 4. 一般的な車速におけるヨー共振現象

この章では、本論文の目的である、式(17)を仮定しない一般的な車速におけるヨー共振モードを導く。

##### 4・1 ヨー共振モードを表す運動方程式の必要条件

一般的な車速でも図 7(A)の形式のブロック線図が成立すると仮定し、そのブロック線図を図 9 とする。もちろん、単に式(17)の仮定を外しただけでは、図 6 に戻ってしまうので、式(15)~(16)の変数を、図 9 の形式を満たすことができる変数に置換える。それが、 $\beta_e$  と  $\beta_a$  であり、 $\beta_e$  は  $\beta_r$  の代わりの変数であり、 $\beta_a$  は  $\beta_f$  の代わりの変数である。ただし、 $\beta_f$  と  $\beta_r$  の両方を同時に置換える必要があるとは限らず、どちらか一つだけの置換えだけで、図 9 の形式を満たせる可能性もある。 $\beta_e$  と  $\beta_a$  の定義を図 10 に示す。 $\beta_e$  を、後輪から  $l_e$  前方の点 e における車体横滑り角として定義し、 $\beta_a$  を、後輪から  $l_a$  前方の点 a における車体横滑り角として定義する。

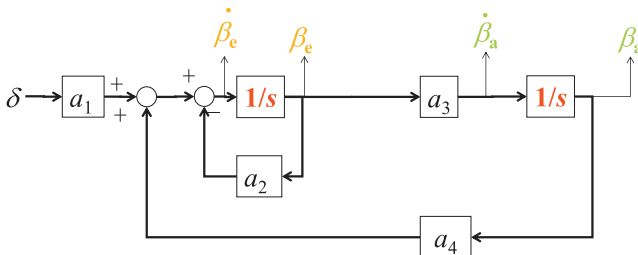


Fig.9 Block diagram of the same configuration as in Fig. 7 (A) ( $a_1 \sim a_4$ :const.).

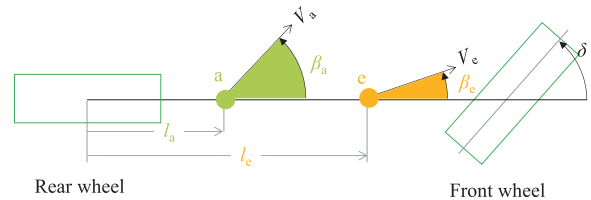


Fig.10 Definition of  $\beta_e$  and  $\beta_a$ .

##### 4・2 $l_e$ の導出

図 9 が成立する条件を、定常円旋回に注目して考えよう。定常円旋回では、 $\beta_e$  や  $\beta_a$  や  $\delta$  が一定だから、 $\dot{\beta}_a = 0$  である。一方、図 9 から  $\beta_a \propto \beta_e$  だから、定常円旋回において

$$\beta_e = 0 \tag{19}$$

が成立する。  $\beta_e=0$  の意味は、図 11 に示すように、点 e における速度ベクトル  $V_e$  の向きが車両中心線に一致することであり、車両から見ると、点 e の真横に旋回中心がある。

式(19)が成り立つときの、  $l_e$  と  $V$  との関係は、

$$V = \sqrt{l_e C_r} \tag{20}$$

であると指摘されている (酒井, 2015)。この式を  $l_e$  について解くと、次のようになる。

$$l_e = \frac{V^2}{C_r} \tag{21}$$

これが、図 10 の  $l_e$  である。検証として、上式(21)に、前報で仮定した式(17)を代入すると、  $l_e=l$  になる。したがって、  $\beta_e=\beta_r$  だから、上式(21)は前報の知見を包含する。  $l_e$  の計算例を図 12 に示す。

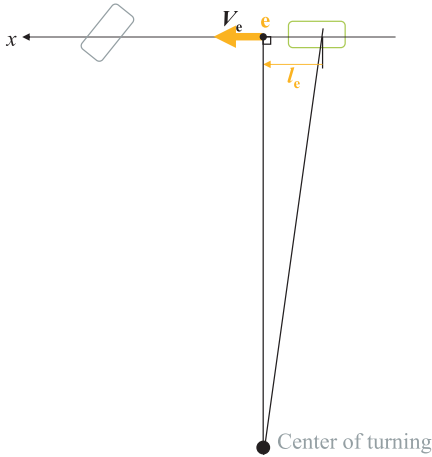


Fig.11 Meaning of  $\beta_e=0$ :  $\beta_e=0$  means that the traveling direction of the point e in a steady state turning is located on the longitudinal axis of the vehicle.

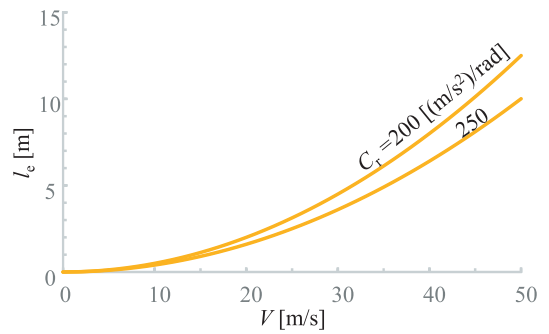


Fig.12 Length of  $l_e=0$  as a function of vehicle speed.

### 4・3 $l_a$ の導出

前述のように、  $\beta_r$  を  $\beta_e$  に置換えただけで図 9 が成立する可能性もあるので、  $\beta_e$  と  $\beta_r$  との組合せで図 9 が成立つかどうかを確認する。  $\beta_r$  を消去する準備として、  $\beta_e$  と  $\beta_r$  を使って、  $\beta_e$  を表すと、

$$\beta_e = \beta - \left( \frac{l_r}{V} - \frac{l_e}{V} \right) r = \beta_r + \frac{l_e}{V} r = \beta_r + \frac{V^2}{l C_r} (\beta_r - \beta_e) \tag{22}$$

となる。ここで、  $r$  の消去に式(13)、  $l_e$  の消去に式(21)を使った。次に、  $\beta_r$  を消去するために、上式(22)最右辺と最左辺を  $\beta_r$  について解くと、

$$\beta_r = \frac{l C_r}{V^2} \beta_e + \left( 1 - \frac{l C_r}{V^2} \right) \beta_e \tag{23}$$

となる。この式を式(16)右辺の  $\beta_r$  に代入して、  $\beta_r$  を消去すると

$$\dot{\beta}_r = -\frac{C_r}{V} \beta_e \tag{16''}$$

となる. 式(16'')は式(16')と同じ形式だから,  $\beta_e$  と  $\beta_r$  とを使ったブロック線図は図9の形式を満たす. したがって,  $\beta_r = \beta_a$  だから,  $\beta_r$  を  $\beta_a$  に置換える必要はない. そこで, 以後,  $\beta_e$  と  $\beta_r$  との組合せを用いる.

#### 4・4 $\beta_e$ と $\beta_r$ とによる運動方程式

式(16'')と組合せるために, 式(15)を  $\beta_e$  と  $\beta_r$  とによって表す. まず, 式(15)右辺の  $\beta_r$  には式(23)を代入する. 次に, 式(23)の両辺を微分した式に, 式(16'')を代入した式, すなわち,

$$\begin{aligned}\dot{\beta}_r &= \frac{IC_r}{V^2} \dot{\beta}_e + \left(1 - \frac{IC_r}{V^2}\right) \dot{\beta}_r \\ &= \frac{IC_r}{V^2} \dot{\beta}_e - \frac{C_r}{V} \left(1 - \frac{IC_r}{V^2}\right) \beta_e\end{aligned}\quad (23')$$

を式(15)左辺の  $\dot{\beta}_r$  に代入する. このように, 式(23), (23')が代入された式(15)を,  $\dot{\beta}_e$  について解くと,

$$\dot{\beta}_e = -\frac{C_f + C_r}{V} \beta_e + \left[\frac{V}{l} + \left(\frac{IC_r}{V^2} - 1\right) \frac{V}{C_r} \frac{C_f}{l}\right] \beta_r + \frac{C_f}{l} \frac{V}{C_r} \delta\quad (15'')$$

となる. 式(15'')と式(16'')との組合せが, 図9に対応する運動方程式であり, 式(10)の仮定だけをした運動方程式である. 式(15'')における  $\beta_e$  の係数が図9中の  $a_2$ ,  $\beta_r$  の係数が  $a_4$ ,  $\delta$  の係数が  $a_1$  であり, 式(16'')の  $\beta_e$  の係数が  $a_3$  である.

## 5. 考 察

本章では, ヨー共振モードとヨー共振のメカニズムについて考察する.

### 5・1 応答指標を用いた表記

本節では, 式(15'')~(16'')の意味をより明確にするため, それらの係数を, 応答指標を使って表わす.

まず応答指標を導出する. 式(15'')~(16'')と式(21)~(23), 式(13)を, 初期値を全て0としてラプラス変換し,  $\delta$  に対する  $r$  や  $\beta_e$ ,  $\beta_r$  の伝達関数を求めると, 次のようになる.

$$\frac{r}{\delta} = \frac{C_f}{l} \frac{1}{T_r} \frac{s+1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\quad (24)$$

$$\frac{\beta_e}{\delta} = \frac{C_f}{l} \frac{T_r s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\quad (25)$$

$$\frac{\beta_r}{\delta} = -\frac{C_r}{l} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}\quad (26)$$

ここで,

$$2\zeta\omega_n = \frac{C_f + C_r}{V}\quad (27)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{C_r}{l} + \left(\frac{IC_r}{V^2} - 1\right) \frac{C_f}{l}}\quad (28)$$

$$T_r = \frac{V}{C_r}\quad (29)$$



であり,  $\omega_n$ はヨー固有角振動数,  $\zeta$ はヨー減衰比,  $T_r$ はヨー進み時定数 (酒井, 2013),  $s$ はラプラス演算子である.

式(27)~(29)を, 式(15'')~(16'')に代入すると, 運動方程式は

$$\dot{\beta}_e = -2\zeta\omega_n\beta_e + \omega_n^2 T_r \beta_r + \frac{C_f}{l} T_r \delta \tag{30}$$

$$\dot{\beta}_r = -\frac{1}{T_r} \beta_e \tag{31}$$

と書ける. 式(30)~(31)も, 式(10)の仮定だけをした運動方程式である. 式(30)~(31)のブロック線図を図 13 に示す. 式(24)~(26)の式に含まれる応答指標は全て図 13 に表れている. したがって, 図 13 は動特性の応答指標が陽に表れた, ヨー共振モードを示唆するブロック線図である.

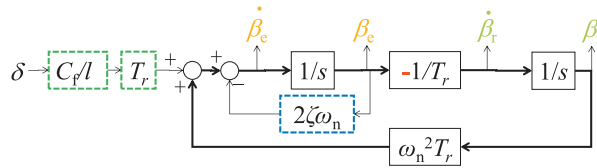


Fig.13 Block diagram with response parameters description under assumption of eq. (10).

### 5・2 一般的な車速におけるヨー共振現象

図 13 の緑と青のブロックを消去する. 式(30)の  $\beta_e$  と  $\delta$  との項どうしを打消す操舵として, 式(18)と同様に,

$$\delta = 2\zeta\omega_n \cdot \frac{l}{C_f} \frac{1}{T_r} \beta_e \tag{18'}$$

の操舵を仮定する. これは,  $\beta_e$  か  $\beta_r$  のうち一つ以上は 0 でないとの初期条件から, 式(18')に基づいて,  $\beta_e$  を  $\delta$  にフィードバックする操舵である. 上式(18')を式(30)に代入すると,

$$\dot{\beta}_e = \omega_n^2 T_r \beta_r \tag{32}$$

となる. 上式(32)と式(31)との組合せが, 式(10), (18')の 2 つの仮定をしたときの運動方程式であり, ヨー共振モードを示唆する. 式(31)~(32)のブロック線図を図 14 に示す. 図 7(B)と比較すると, 負号のある  $-1/T_r$  が図 14 の復原項であることが分かる.

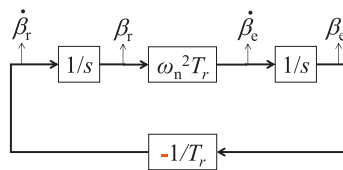


Fig.14 Block diagram of yaw resonance under the assumptions of eqs. (10) and (18'): This block diagram has the same configuration as Fig. 2 at all vehicle speeds.

図 14 の妥当性を, 伝達関数で確認をする.  $\beta_e/\delta$  の伝達関数と  $\beta_r/\delta$  の伝達関数は, それぞれ式(25)と式(26)によって表されている. これらを使うと,  $\dot{\beta}_e/\dot{\beta}_r$  の伝達関数は

$$\frac{\dot{\beta}_e}{\dot{\beta}_r} = \frac{s \left( \frac{\beta_e}{\delta} \right)}{\left( \frac{\beta_r}{\delta} \right)} = \frac{\frac{C_f}{l} \frac{T_r s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}{-\frac{C_f}{l} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} = -T_r s^2 \tag{33}$$

となる。次に、ヨー共振周波数における周期的操舵を想定して、この式に  $s=j\omega_n$  ( $j$ : 虚数単位) を代入すると、

$$\frac{\dot{\beta}_e}{\beta_r} = \omega_n^2 T_r \tag{34}$$

となる。これは、図 14 の  $\beta_r \sim \dot{\beta}_e$  間のブロックと等しい。これと同様に、 $\dot{\beta}_r/\beta_e$  は、

$$\frac{\dot{\beta}_r}{\beta_e} = -\frac{1}{T_r} \tag{35}$$

となる。これは、図 14 の  $\beta_e \sim \dot{\beta}_r$  間のブロックと等しい。これらのように、図 14 は伝達関数と整合する。

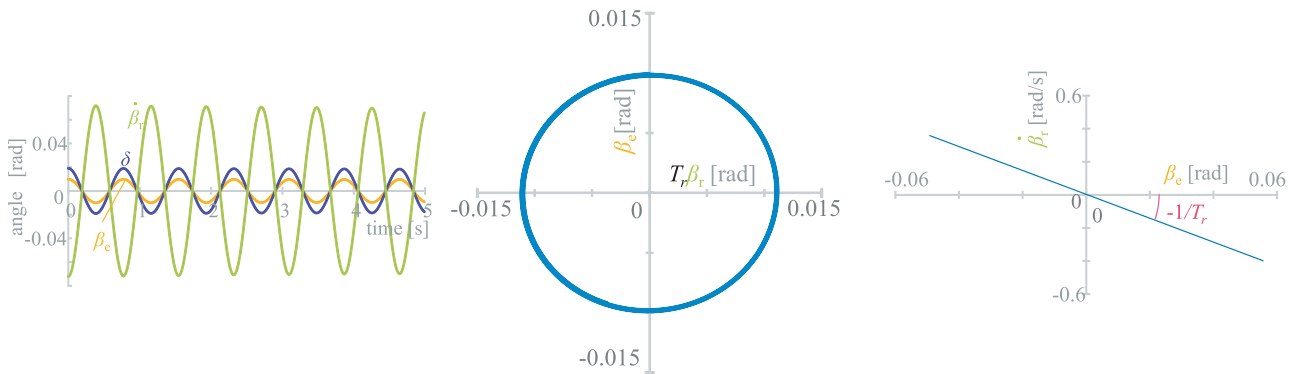
さらに、図 14 を、図 15 に示される数値シミュレーションで確認をする。この図は、 $t=0$  における初期値  $\beta_e=0.01$ ,  $\beta_r=0$  [rad] から、式(18')によって  $\beta_e$  をフィードバック操舵したときの式(30)~(31)による計算結果である。

この応答は、図 15(A) に示されるように周期的である。この 1 周期は 0.773[s] であり、図 15 に記した諸元で計算した  $\omega_n=8.12$  [rad/s] (=1.29[Hz]=1/0.773[1/s]) と整合するので、図 15(A) がヨー共振であることが確認できる。なお、図 15 には記していないが、式(18')による  $\delta$  を 1.01 倍にしたときは振動的に発散し (負の減衰)、0.99 倍のときは振動的に減衰した (正の減衰) ので、式(18')の操舵をしたときが一定振幅 (無減衰) である。また図 15(A) では、 $\beta_e$  と  $\dot{\beta}_r$  とが逆位相であることも図 14 と整合する。

図 15(B) には  $\beta_e$  と  $\beta_r$  との関係が示されている。両者のリサージュ波形は円形である。その理由は、図 14 に示すように、 $\beta_e \sim \beta_r$  間に積分があるので、位相が  $90^\circ$  ずれるからである。なお、図 15(B) の横軸は、 $\beta_e$  と  $\beta_r$  の振幅を合わせるために、 $\beta_r$  を  $T_r$  倍してある ( $T_r$  は、図 14 の  $\beta_e \sim \beta_r$  間の比例係数の絶対値である)。

図 15(C) には、 $\beta_e$  と  $\dot{\beta}_r$  との関係が示されている。両者のリサージュ波形は直線である。直線になる理由は、図 14 に示すように、 $\beta_e$  と  $\dot{\beta}_r$  とが比例する (同位相) からである。この直線の傾きは図 14 のブロックと同様に  $-1/T_r$  である。

以上のように、図 14 と図 15 とが整合するので、図 14 の妥当性が検証されたと思われる。



(A) Steering

(B) Relationship between  $\beta_e$  and  $\beta_r$

(C) Relationship between  $\beta_e$  and  $\dot{\beta}_r$

Fig.15 Vehicle behavior based on eq. (30) through (31) when steered by eq. (18') with  $\beta_e=0.01$  and  $\beta_r=0$  [rad] as the initial value;  $C_f=100$ ,  $C_r=200$  [(m/s<sup>2</sup>)/rad],  $l=2.5$  [m],  $V=27.8$  [m/s],  $l_e=3.86$  [m],  $\omega_n=8.12$  [rad/s]: In Fig. (B), since the steady-state waveform is a circle, it is implied that the amplitude ratio of  $\beta_r$  and  $\beta_e$  is  $T_r$  (=0.139[s]) and that their phase difference is  $\pi/2$  [rad] as implied in Fig. 14. In Fig. 15(C), it is implied that  $\beta_e$  and  $\dot{\beta}_r$  are always in a proportional relationship and that the proportionality constant is  $-1/T_r$ . The above results are consistent with Fig. 14.

### 5・3 ヨー共振モード

ヨー共振モードを、式(31)を基に考察する。式(16')と同様に、式(31)左辺  $\dot{\beta}_r$  が後輪の復原を示唆する。また、式(31)右辺の  $\beta_e$  が釣合位置  $\beta_e=0$  を示唆する。 $\beta_e=0$  の釣合位置とは、図 8 の  $V_f$  と同様に、 $V_e$  の延長線上である。この線上に後輪があれば、釣合状態である。

点  $e$  の位置はこうである。点  $e$  と  $V$  との関係を表す式(20)から、 $V$  が大きいほど、後輪よりも前方に点  $e$  がある。特に、 $(l_c r)^{1/2}$  よりも低速側の  $V$  では、 $l > l_c$  となるので、前輪と後輪との間に点  $e$  があり、前報で仮定した  $V = (l_c r)^{1/2}$  のとき  $l_c = l$  だから、点  $e$  は前輪上にあり、 $(l_c r)^{1/2}$  よりも高速側の  $V$  では、点  $e$  は前輪よりも前方にある。

以上のことから、一般的な  $V$  におけるヨー共振モードは図 16 のようになる。このように、車速は、釣合位置だけに影響し、復原するものが後輪であることには影響しない。

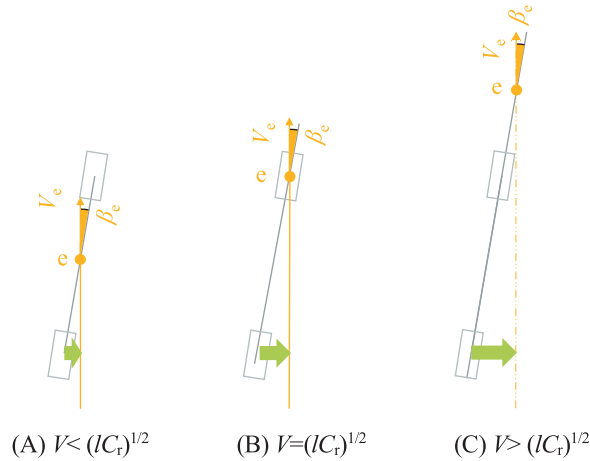


Fig.16 Mode of yaw resonance at general vehicle speed: As the vehicle speed increases, the point  $e$  moves forward of the vehicle.

図 16(A), (C)の検証として、直進からのインパルス操舵に対する  $\beta_e$  や  $\beta_r$  の時刻歴応答を図 17(A)~(B)中の(a)に示す。この応答下の、点  $e$  の軌跡の回転中心である  $O_{Te}$  や、後輪の旋回軌跡の回転中心である  $O_{Tr}$  を車両から観測した結果 (竹原, 山本, 2014) を、図 17(A), (B)中の(b)に示す。  $O_{Te}$  と  $O_{Tr}$  の概念図は図 17(C)に示されている。  $O_{Te}$  と  $O_{Tr}$  は、後輪に原点  $o_r$  を固定し、車両前方に  $x_r$  軸をとった、車両とともに移動する直交座標系  $o_r-x_r-y_r$  上で表されている。

図 17(A), (B)中の(b)に示されるように、  $O_{Tr}$  の  $x_r$  座標である  $x_{Tr}$  は、点  $e$  の  $x_r$  座標と常に同じである (図には示していないが、ステップ操舵でも同じ結果になることを確認している)。このことは、点  $e$  の速度ベクトル  $V_e$  の延長線上に向かって、後輪が復原することを示唆すると思われる。

なお、  $x_{Te}$  や  $y_{Te}$  はそれぞれ次式で表わされる。

$$x_{Te} = -R_e \sin \beta_e + l_c \tag{36}$$

$$y_{Te} = R_e \cos \beta_e \tag{37}$$

ここで  $R_e$  は、点  $e$  の軌跡の半径であり、

$$R_e = \frac{V^2}{a_{ye}} \tag{38}$$

と表わされる。  $a_{ye}$  は点  $e$  位置における横加速度であり、

$$a_{ye} = V(\dot{\beta}_e + r) \tag{39}$$

である。  $x_{Tr}$  や  $y_{Tr}$  は、式(36)に  $l_c = 0$  を代入した上で、式(36)~(39)の添え字  $e$  を  $r$  に置換えた式によって得られる。

なお、図 17(A), (B)中の(b)の  $y_r$  や  $y_e$  の値の桁が  $10^{12}$ [m]オーダーなのは、直進では旋回半径が無限大だからである。また、これと同様のオーダーで  $x_e$  も動くため、  $x_e$  はこの図の範囲外の瞬間もある。

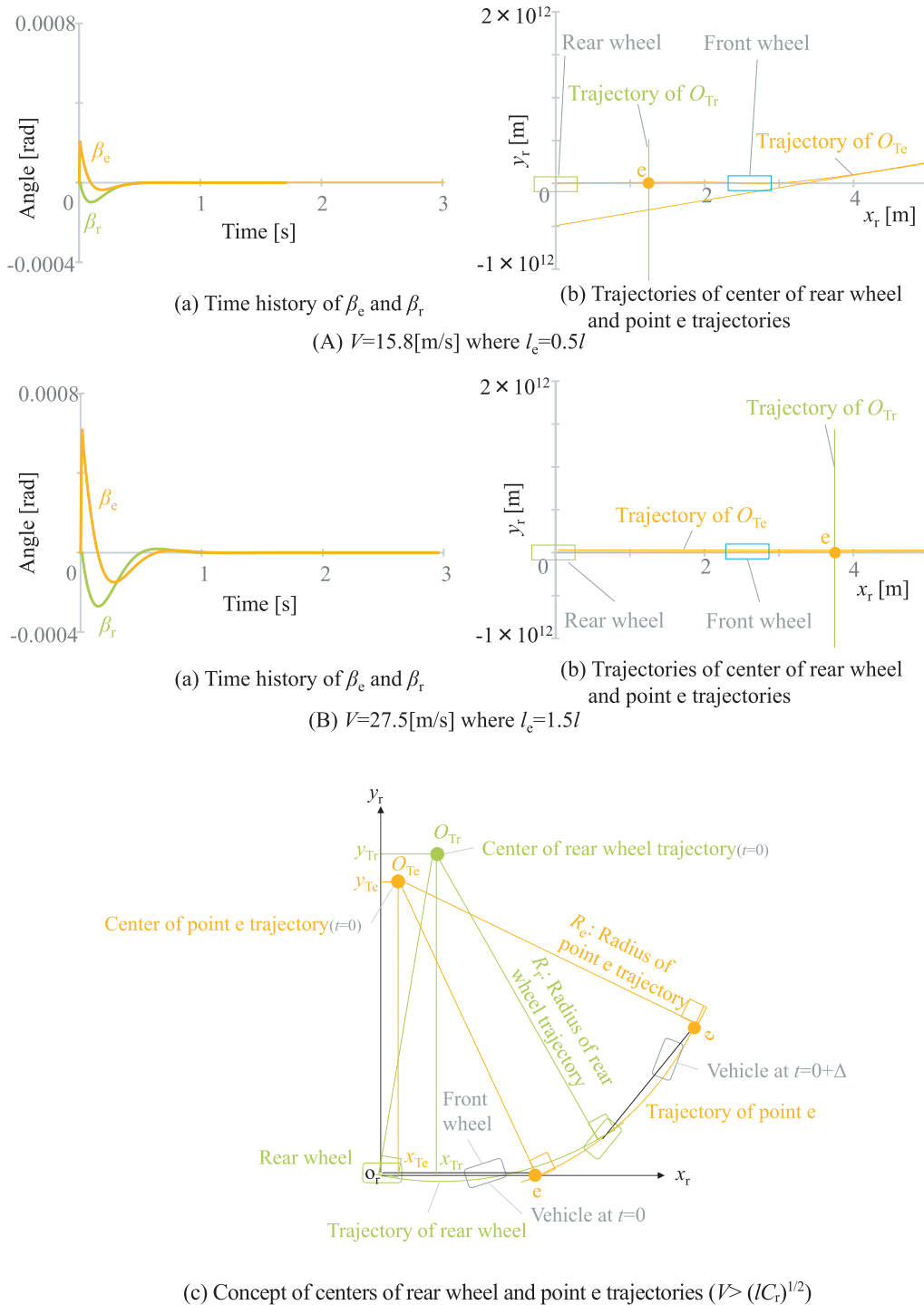


Fig. 17 Vehicle behavior under impulse steer at  $t=0$ :  $C_f=100$ ,  $C_r=200[(\text{m/s}^2)/\text{rad}]$ ,  $l=2.5[\text{m}]$ ,  $\delta=0.01[\text{rad}]$ : Fig. (b)s in Fig.(A) and (B) show that the turning center of the rear wheels is located in the lateral direction of point e. This implies that the yaw resonance equilibrium position is located on vector  $V_e$ , as shown in Fig. 16.

#### 5・4 点 e が釣合い位置に関する理由

ヨー共振の釣合い位置は、図 11 で示されるように、「定常円旋回において横滑り角が 0 になる位置である点 e における車速ベクトル  $V_e$  の延長線上」であった。この理由は、次のように考察される。

式(31)より定常円旋回では  $\beta_e=0$  だから、後輪は釣合い位置にある。後輪は車両中心線上にあるから、釣合い位置は車両中心線上にある。車両中心線と一致する速度ベクトルは、旋回半径と車両中心線とが直交する位置 (点 e)

の速度ベクトル  $V_e$  である。  $V_e$  は車両中心線上にあるから、点  $e$  の横滑り角は  $0$  である。このように、定常円旋回において、後輪上に  $V_e$  があるので、その結果として、点  $e$  位置の横滑り角が  $0$  になるものと思われる。

## 6. 結 言

本論文は、ヨー慣性モーメントを現実の範囲内で仮定したときの、一般的な車速におけるヨー共振モードを求めた。その要点を以下にまとめる。

モードについて：釣合位置は、定常円旋回で横滑り角  $0$  になる位置（点  $e$ ）の車速ベクトル  $V_e$  の延長線上にある。釣合位置に向かって後輪が加速することが、ヨー共振における復元であることを、運動方程式を考察することによって、指摘した。

検証について：上記指摘の蓋然性を、時刻暦応答および伝達関数、位相平面解析、旋回中心の位置の解析によって、検証した。

点  $e$  について：点  $e$  の位置は、車速  $0$  では後輪にあり、車速の  $2$  乗に比例して前方に移動する。

以上の知見によって、車両過渡応答についてのドライバーの観察結果を、より設計に反映しやすくなれば、幸いである。

## 文 献

- Best MOTORing, マツダ AZ-1 登場!! K スポーツ頂上決戦 土屋圭市 服部尚貴【Best MOTORing】1992, available from <<https://youtu.be/1jUbZy2qbZA?t=233>> (参照日 2020年11月30日)
- 北浜謙一, 酒井英樹, 正規化したコーナリングパワーを用いた自動車の操舵応答性能の同定法, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.65, No.633(1999), pp.1960-1965.
- 小寺忠, 矢野澄雄, 演習で学ぶ機械力学(2014), p.76, 森北出版.
- 酒井英樹, 自動車の平面運動におけるヨー角速度進み時定数についての力学的考察, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.79, No.801(2013), pp.1681-1692.
- 酒井英樹, 自動車運動力学～気持ちよいハンドリングのしくみと設計～(2015), pp.9-52, 森北出版.
- 酒井英樹, ヨー共振モードについての基礎的研究(簡潔モデルの共振現象から解釈するヨー共振現象とドライバーの評価用語との関係), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.84, No.866 (2018), DOI: 10.1299/transjsme.18-00014.
- 酒井英樹, 操縦性の気持ちよさを設計に反映するための主観評価項目の試乗動画に基づく考察, 自動車技術会 2020年秋季大会学術講演会講演予稿集, No.180-20 (2020), pp.1-6.
- 竹原伸, 山本真規, 剛体の回転と重心の旋回から考察した車両挙動, 自動車技術会論文集, Vol.45, No.4 (2014), pp.89-94.

## References

- Best motoring MAZDA AZ-1 Tojo!! K supotsu chojo kessen Tsuchiya Keiichi Hattori Naoki, Best motoring 1992, available from <<https://youtu.be/1jUbZy2qbZA?t=233>>, (accessed on 30 November, 2020) (in Japanese).
- Kitahama, K. and Sakai, H., Identification method of automobile response to steering input using normalized cornering stiffness, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.65, No. 633(1999), pp.1960-1965 (in Japanese).
- Kotera, T. and Yano, S., Enshu de manabu kikairikigaku(2014), p.76, Morikita Publishing (in Japanese).
- Sakai, H., A physical interpretation of lead time constant of yaw angular velocity in planar motion of automobile, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.79, No.801 (2013), pp.456-467 (in Japanese).
- Sakai, H., Automotive Vehicle Dynamics (2015), pp.9-52, Morikita Publishing (in Japanese).
- Sakai, H., Fundamental study on yaw resonance mode (Relationship between yaw resonance phenomenon and evaluation terms of drivers interpreted based on resonance phenomenon in a simple model), Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.84, No.866 (2018), DOI: 10.1299/transjsme.18-00014.
- Sakai, H., Extraction of subjective evaluation items about “fun” of handling from test drive videos to reflect in design, Proceedings of 2020 JSAE Congress (Autumn), No.180-20 (2020), pp.1-6 (in Japanese).
- Takehara, S. and Yamamoto, M., Vehicle Dynamics from the view of rigid body rotation and gravity center turning, International

Journal of Automotive Engineering, Vol.45, No.4 (2014), pp.89-94 (in Japanese).

## A1. 式(15)～(16)の別導出法

ここでは、式(15)～(16)導出の計算量が前報よりも少ない、本報独自の導出方法を紹介する。それは衝撃の中心（加速度が0の位置）（小寺、矢野、2014）を利用する方法である。前輪位置に力を加えたときの衝撃の中心は、式(10)から、後輪位置にあり、後輪位置に力を加えたときの衝撃の中心は前輪位置にある。したがって、 $m_f$ は $2F_f$ だけによって加速するから、 $m_f$ についての並進運動の運動方程式は、

$$m_f V(\dot{\beta}_f + r) = 2F_f = -C_f m_f (\beta_f - \delta) \quad (\text{A1})$$

となる。上式左辺の $V(\dot{\beta}_f + r)$ は、 $m_f$ の横加速度である。上式を $\dot{\beta}_f$ について解くと、

$$\dot{\beta}_f = \frac{C_f}{V}(\beta_f - \delta) - r \quad (\text{A2})$$

となる。上式(A2)の右辺の $r$ に式(13)、すなわち、

$$r = \frac{V}{l}(\beta_f - \beta_r) \quad (\text{13 : 再})$$

を代入することによって、式(15)である次式が得られる。

$$\dot{\beta}_f = -\left(\frac{C_f}{V} + \frac{V}{l}\right)\beta_f + \frac{V}{l}\beta_r + \frac{C_f}{V}\delta \quad (\text{15 : 再})$$

次に、 $m_r$ も $2F_r$ だけによって加速するから、 $m_r$ についての並進運動の運動方程式は、

$$m_r V(\dot{\beta}_r + r) = -C_r m_r \beta_r \quad (\text{A3})$$

となる。この式を $\dot{\beta}_r$ について解き、さらに $r$ を、式(13)を使って消去すると、次式(16)が得られる。

$$\dot{\beta}_r = -\frac{V}{l}\beta_r - \left(\frac{C_r}{V} - \frac{V}{l}\right)\beta_r \quad (\text{16 : 再})$$

なお、以上の導出過程から、式(15)～(16)の $C_f/V$ と $C_r/V$ は、それぞれ $2F_f$ と $2F_r$ に由来する項であり、 $\pm V/l$ は $r$ に由来する項であることが分かる。