

# ロール運動がヨー共振周波数に及ぼす影響\*

酒井 英樹<sup>1)</sup>

## Influence of Roll Motion on Yaw Natural Frequency

Hideki Sakai

This paper considered the root loci plot when the velocity was changed by using 3 degree of freedom (D.O.F) model consisting of plane 2 D.O.F motion and roll 1 D.O.F motion. As a result of the parameter study, this paper pointed out that the two root loci may become double roots in a case. On the lower speed side than the vehicle speed at which the double root occurs, the yaw natural frequency was about 30% larger than that of the 2.D.O.F plane model. Thus, an approximate expression of the yaw natural frequency in this vehicle speed range was proposed.

**KEY WORDS:** Chassis/component, Vehicle dynamics, Driving stability, Roll, Yaw (B1)

### 1. まえがき

操安性の評価項目の一つに、操舵過渡応答特性があり、その評価指標にヨー共振周波数  $\omega_n$  やヨー減衰比  $\zeta$  (これらの総称を本論文では「ヨー共振」と記す) がある<sup>(1)</sup>。ヨー共振は、ロールの影響を受ける。平面 2 自由度運動とロール運動を連成させた場合の特性方程式はラプラス演算子  $s$  の 4 次式になる<sup>(2)</sup>ので、ロール運動を考慮した場合のヨー共振の厳密解の文字式による考察は困難である。そのため、ロールがヨー共振に及ぼす影響を一つの切口だけによって大域的に見通すことは本質的に不可能である。したがって、複数の切口からの研究の積み重ねによって、大域的な見通しが得られるものと思われる。

従来の研究に、ヨー共振の定式化<sup>(2)</sup>や慣性主軸<sup>(3)</sup>、断面モデル<sup>(4)(5)</sup>、根軌跡<sup>(6)</sup>等がある。これらにより、ある程度の見通しが徐々に得られつつあるものと思われる。

そこで、本論文は、一つの切口として、根軌跡とヨー共振周波数との関係の観点から考察を行うことによって、過渡応答特性のさらなる向上に資することを目的とする。

### 2. 車両モデル

#### 2.1. 仮定

ロール運動のモデル化にあたり、次の仮定をおく。

仮定 1) ばね上質量に比べて、ばね下質量は十分小さい。

\*2018 年 6 月 5 日受理。

2018 年 5 月 25 日自動車技術会春季学術講演会において発表。

1) 近畿大学(739-21160 広島県東広島市高屋うめの辺 1

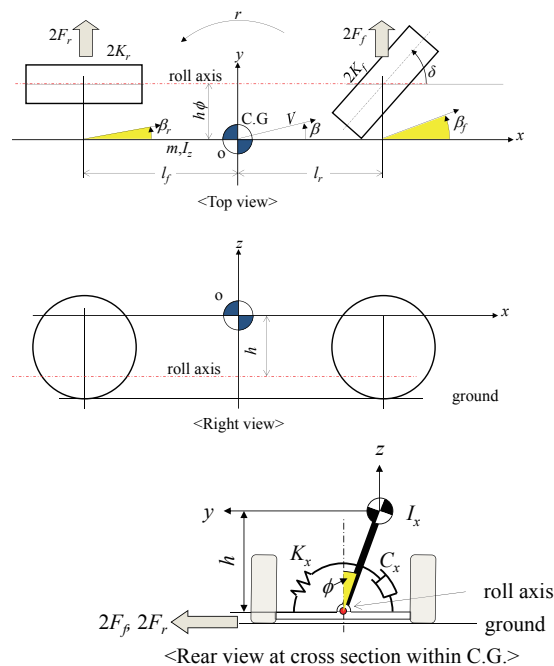


Fig.1 Vehicle model

したがって、ばね上質量の重心を車両重心とする。

仮定 2) 車両の慣性主軸は水平面内および鉛直面内にあり、その慣性乗積は 0 とする。

仮定 3) ロール軸は水平とする。

仮定 4) 前後サスペンションには、ロールに伴う機構学的・幾何学的ステア角変化や対地キャンバ角変化は生じない。

なお、これらの仮定に関する影響は次の通りである。ばね上質量に比べてばね下質量が大きいほど重心まわりのロール共振周波数<sup>(5)</sup>が減少し、慣性主軸が前傾すると舵角に

対するヨー角速度とロール角の立ち上がりが遅れ<sup>(3)</sup>、後輪のロールセンタが高い(ロール軸前傾)ほど、 $\zeta$ が増加し<sup>(7)</sup>、後輪のロールアンダステアが強いほど、同量の横力コンプライアンスステアの場合に比べて $\zeta$ が減少する<sup>(8)</sup>。

## 2.2. 座標系

車両重心に座標系  $o-x-y-z$  を固定する。  $x, y$  軸は水平面内にあり、  $z$  軸は鉛直軸とする。 ロール角は微小として、ロールしても座標系は傾かないものとする。

## 2.3. 車両モデル

本論文に用いる車両モデルを図 1 に示す。 また、その記号と基準諸元値を本論文末に記す。 以後の計算において数値が記されていない場合は基準諸元値を使う。 なお基準諸元値は文献(6)に記された値を用いた。 ただしロール減衰係数  $C_x$  だけは、本論文後半の趣旨から、変更した。

このモデルは、3 自由度モデルである。 その  $y$  軸方向並進、  $z$  軸まわり回転、  $x$  軸まわり回転の線形化された運動方程式は、それぞれ次のようになる<sup>(9)</sup>。

$$mV(\dot{r} + \dot{\beta}) = 2F_f + 2F_r \quad (1)$$

$$I_z \dot{r} = 2l_f F_f - 2l_r F_r \quad (2)$$

$$I_x \ddot{\phi} = -C_x \dot{\phi} - (K'_x - mgh)\phi + 2h_f F_f + 2h_r F_r \quad (3)$$

ここで  $I_x$  は  $x$  軸まわりのロール慣性モーメントである。 また、  $2F_f, 2F_r$  は、それぞれ前後輪のコーナリングフォースであり、それぞれ次式によって表される。

$$2F_f = -2K_f \left( \beta_f + \frac{h}{V} \dot{\phi} - \delta \right) \quad (4)$$

$$2F_r = -2K_r \left( \beta_r + \frac{h}{V} \dot{\phi} \right) \quad (5)$$

上式右辺( )内が見かけのタイヤスリップ角(コーナリングフォースに起因する、操舵系やサスペンションの弾性変形(コンプライアンス)によって生じる切れ角変化が加味されたタイヤのスリップ角)であり、式(4), (5)の( )内第 2 項は、ロール運動と平面運動との連成項である<sup>(9)</sup>。 また  $2K_f, 2K_r$  は、それぞれ等価コーナリングパワ<sup>(10)</sup>(切れ角変化が加味されたコーナリングパワ)である。 さらに上式中の  $\beta_f, \beta_r$  はそれぞれ前輪位置車体横滑り角、後輪位置車体横滑り角であり、次式で表される。

$$\beta_f = \beta + \frac{l_f}{V} r \quad (6)$$

$$\beta_r = \beta - \frac{l_r}{V} r \quad (7)$$

次にヨー共振周波数の式をより簡潔にするため、物理値の置き換えをする。 まずヨー慣性モーメントを、次式<sup>(11)</sup>に示さ

れるヨー慣性半径係数  $k_N$  で置き換える。

$$k_N = \sqrt{\frac{I_z}{I_f l_f m}} \quad (8)$$

本論文では、文献(6)にならって  $k_N = 0.958$  とした。 なお  $k_N^2$  の分布は 0.85~1.05 との報告がある<sup>(12)</sup>。 また等価コーナリングパワ  $2K_f, 2K_r$  をそれぞれ、次式に示される重力加速度が乗じられたコーナリング係数  $C_f, C_r$  で置き換える<sup>(13)</sup>。

$$2K_f = C_f \left( \frac{l_f}{l} m \right) \quad (9)$$

$$2K_r = C_r \left( \frac{l_r}{l} m \right) \quad (10)$$

本論文では、文献(6)にならって、  $C_f = 97, C_r = 200 [\text{m/s}^2]$  とした。 なお、  $C_f$  の目安は 100,  $C_r$  の目安は  $200 [\text{m/s}^2]$  との報告がある<sup>(12)</sup>。 次に、ロール共振周波数の式をより簡潔にするために、次式で表される等価ロール剛性  $K_x$  を用いてロール復元項を表す。

$$K_x \equiv K'_x - mgh \quad (11)$$

式(1)~(11)からなる運動方程式を本論文では以後「3 自由度モデル」と記す。 3 自由度モデルの特性方程式は次式で表される。

$$\begin{aligned} & [I_x s^2 + C_x s + K_x] \\ & [2k_N^2 W^2 s^2 + (1 + k_N^2)(C_f + C_r) W s + 2(C_f V^2 - C_f V^2 + C_f C_f l)] \\ & + 2C_f C_f l h^2 m s^2 + k_N^2 (C_f + C_r) l h^2 m V s^3 = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

特性方程式の求め方は、入力を 0 (この場合は  $\delta = 0$ ) とした運動方程式の初期条件を全て 0 としてラプラス変換し、その運動方程式を 1 変数 (この場合は  $r$  か  $\beta$  か  $\phi$ ) についての微分方程式に変形し、その変数の係数が 0 と等しいとおくことである<sup>(14)</sup>。 なお特性方程式とは、自由振動が成立するための条件式である。

## 3. 平面運動やロール運動の基本的性質

この章では、ロール運動が平面運動に及ぼす影響を考察するための、基準や参考とするためのモデルについて述べる。

### 3.1. 平面 2 自由度モデル

ロールが平面運動に及ぼす影響を表すための基準としてロールと連成しない平面 2 自由度モデル (以後「平面 2 自由度モデル」) を用いる。 平面 2 自由度モデルの運動方程式は、前述の線形 3 自由度モデルからロール運動を除去したものである。 すなわち、式(1), (2), (4)~(11)において  $h=0$  としたものである。 この特性方程式は次式で表される。

$$2k_N^2 W^2 s^2 + (1 + k_N^2)(C_f + C_r) W s + 2(C_f V^2 - C_f V^2 + C_f C_f l) = 0 \quad (13)$$

このモデルにおけるヨー共振周波数  $\omega_{m0}$  の 2 乗は、式(13)の復元項である  $s^0$  の係数を慣性項である  $s^2$  の係数で割ることによって得られる。  $\omega_{m0}$  は次式で表される<sup>(12)</sup>。

$$\omega_{n0} = \sqrt{\frac{C_r}{k_N^2 l} + \left(\frac{IC_r}{V^2} - 1\right) \frac{C_f}{k_N^2 l}} \quad (14)$$

### 3.2. 断面モデル

ロールが平面運動に及ぼす影響を表すための参考として平面運動と連成しないロールモデル（以後「断面モデル」）を用いる。断面モデル<sup>(4)</sup>は、 $\beta$ と $\varphi$ の2自由度の車両運動モデルであり、いわば図1の背面視だけのモデルである。この車両運動モデルは、ニュートラルステア車 ( $C_f = C_r$ ) における $\beta$ と $\varphi$ の2自由度の車両運動モデルであると指摘されている<sup>(6)</sup>。そこで、式(1)~(11)において、 $C_f = C_r = C$ とした場合の特性方程式は、次式で表される<sup>(6)</sup>。

$$\left[ VI_x s^3 + (VC_x + CI_x + Ch^2 m) s^2 + (CC_x + VK_x) s + CK_x \right] \quad (15)$$

$$\left( k_N^2 V s + C \right) = 0$$

この式中の[ ]を0とおいた等式、すなわち

$$VI_x s^3 + (VC_x + CI_x + Ch^2 m) s^2 + (CC_x + VK_x) s + CK_x = 0 \quad (16)$$

が断面モデルの特性方程式<sup>(4)</sup>である。なお、式(15)における[ ]外の項は、ヨー運動の特性方程式に対応する<sup>(6)</sup>。

式(16)は、式(13)と違って、 $s$ の3次式だから、式(16)を厳密に解いて、断面モデルのロール共振周波数を求めることは困難である。そのため、式(14)のような文字式によって、ロール共振周波数を厳密に解いて、文字式を得ることは困難である。このように、特性方程式が3次以上の場合の、文字式による解析手法として、次の3つの方法が指摘されている<sup>(15)</sup>。

- 1)  $s$ の3次以上の特性方程式を、 $s$ の2次式に近似（低次化）して、共振周波数を近似的に定式化する（近似された特性方程式の次数は、近似前よりも低次）。
- 2)  $s$ の3次以上の特性方程式を近似的に因数分解して、特性方程式を $s$ の2次式や1次式に分解し、それぞれの共振周波数等を定式化する（近似しても特性方程式の次数は変わらない）。
- 3) 安定領域と不安定領域との臨界条件を定式化し、その式を考察する。

上記1)2)の例として、鉄道車両の輪軸（輪軸は、車軸と左右の車輪から成る）の蛇行動がある。この特性方程式は $s$ の4次式であるが、この式において車速を0と仮定（ダイナミクスを無視）し、 $s$ の2次式に低次化することによって、共振周波数が定式化されている<sup>(16)</sup>。これが上記1)の例である。一方、ダイナミクスを無視しない代わりに、自動車タイヤにおけるコーナリングパワとブレーキングスティフネスに相当する係数（横、縦クリープ係数）が互いに等しい等の仮定をすることにより、 $s$ の4次式のまま近似された特性方程式を厳密に解いて共振周波数を求めた例<sup>(15)</sup>が上記2)に相当する。また、上記2)3)の例として、自動車のフォースコントロール下の操舵系や車両の応答性・安定性がある。フォースコントロール下では平面2自由度運動と操舵系とが連成するため、その特性

方程式は $s$ の4次式になる。この $s$ の4次式を、安定判別によって安定領域と不安定領域の臨界条件を定式化<sup>(17)</sup>したものが、上記3)の例である。一方、この特性方程式を、安定と不安定な場合に場合分けしたうえで、さらに近似をおこない、2つの $s$ の2次式に因数分解することによって導出された操舵系や車両の共振周波数<sup>(13)(18)</sup>が上記2)の例である。

この3手法の使い分けは、対象とする特性方程式と相性の良い手法を選ぶことであると思われる。なぜなら、この3手法全てが、あらゆる特性方程式にあてはめて、うまくいくとは限らないからである。

文献(5)では、上記1)の方法が用いられた。文献(16)に準じて、式(16)において、まず、 $V \rightarrow \infty$ とすると、式(16)は

$$s(I_x s^2 + C_x s + K_x) = 0 \quad (17)$$

となる。この( )内の $s^0$ の係数が復原項、 $s^2$ の係数 $I_x$ が慣性項を表す。 $I_x$ は $x$ 軸まわりのロール慣性モーメントであるから、この共振モードは、重心まわりのロールである。このロール共振周波数を $\omega_{x@CG}$ と記すと、 $\omega_{x@CG}$ は次式で表される<sup>(19)</sup>。

$$\omega_{x@CG} = \sqrt{\frac{K_x}{I_x}} \quad (18)$$

次に、式(16)に、 $V=0$ を代入すると、式(16)は

$$(I_x + h^2 m) s^2 + C_x s + K_x = 0 \quad (19)$$

となる。この( )内の $s^2$ の係数が慣性項 $I_x + h^2 m$ は、重心から $h$ 離れた軸まわりのロール慣性モーメントを意味する。 $h$ は、重心からロール軸までの距離だから、 $I_x + h^2 m$ は、ロール軸まわりのロール慣性モーメントである。そこで、この共振モードは、ロール軸まわりのロールであると指摘されており、このロール共振周波数を $\omega_{x@RA}$ と記すと、次式で表される<sup>(19)</sup>。

$$\omega_{x@RA} = \sqrt{\frac{K_x}{I_x + h^2 m}} \quad (20)$$

$\omega_{x@CG}$ と $\omega_{x@RA}$ は、特殊な $V$ を想定することによって定式化されたロール共振周波数である。一般的な $V$ においては、文献(5)の図によれば、 $V$ が増加するにつれて、ロール共振周波数も、 $\omega_{x@CG}$ と $\omega_{x@RA}$ との範囲内で、増加するよう見える。

以上のように、ロール共振周波数やそのモードは $V$ によって変化すると指摘されている。

### 4. 根軌跡を用いたヨー共振の考察

この章では、車速を変化させたときの根軌跡には3種類あることを指摘し、その1種類では、1つの根軌跡にヨー共振根とロール根とが混在することを指摘し、その境界の車速について考察する。なお、根軌跡とは、制御工学の古典制御理論において、フィードバックゲインを変化させたときの制御系の特性方程式の根の変化（軌跡）を複素平面に描いたものであり、根の実部が減衰比×共振周波数を、絶対値が共振周波数をそれぞれ表す。本論文では、これを準用して、フィードバックゲインの代わりに、 $V$ や $C_x$ を変化させる。

4.1 根軌跡の種類

根軌跡は、文献(6)によって解析されている。その計算諸元による根軌跡<sup>(6)</sup>を図 2(A)に示す。この図には、平面 2 自由度モデルおよび断面モデルの根軌跡も合わせて示されている。3 自由度モデルの根軌跡は、平面 2 自由度モデルの根軌跡にも、断面モデルの根軌跡にも沿っていない (なお、この計算諸元において  $C_x$  だけは文献(6)と異なるが、沿わないことには変わりはない)。

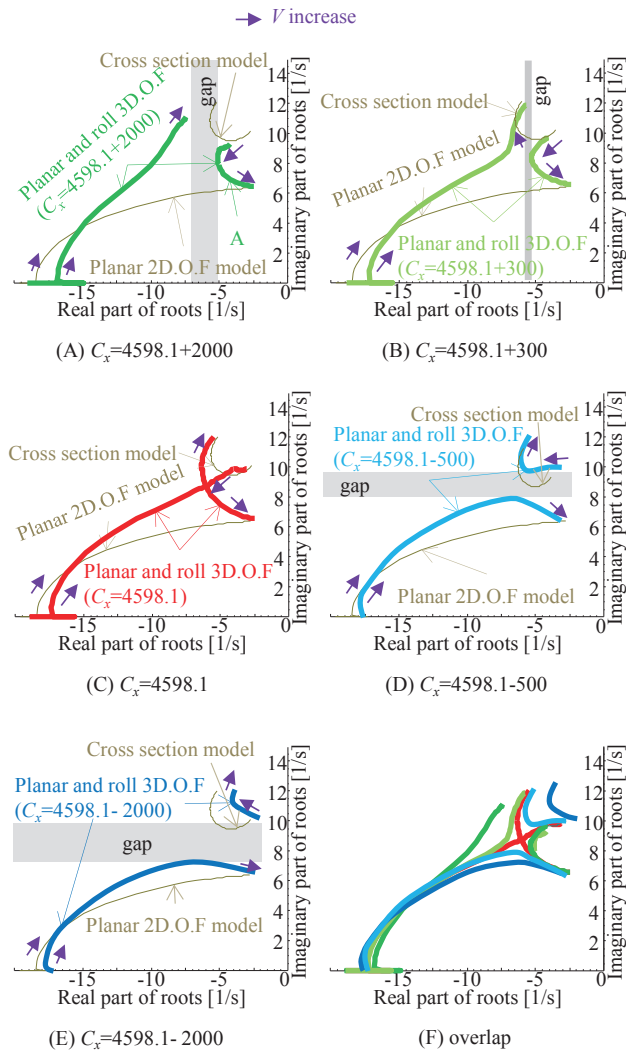


Fig.2 Root loci plots as a function of vehicle speed

そこで、3 自由度モデルの根軌跡の大域的性質を考察する。式(12)に  $V=0$  を代入すると、式(12)は

$$(I_x + h^2 m)s^2 + C_x s + K_x = 0 \tag{21}$$

となる。この式は式(19)と同じであるから、 $V=0$  のとき断面モデルと同じ式になる。また、式(12)において、 $V \rightarrow \infty$  とすると、式(12)は

$$[I_x s^2 + C_x s + K_x] \cdot [k_N l s^2 + C_r - C_f] = 0 \tag{22}$$

となる。式(22)の第 1 [ ] 内は、式(17)の ( ) 内と同じだから、 $V \rightarrow \infty$

のとき、3 自由度モデルの特性方程式は断面モデルと同じ式になる。したがって、 $V=0$  と  $V \rightarrow \infty$  において、式(12)の根軌跡は、断面モデルに近接するはずである。したがって図 2(A)の 2 つの根軌跡の上部がロール根軌跡に相当するものと思われる。

一方、式(22)の第 2 [ ] は、式(13)の両辺を  $V^2$  で除した式を  $V \rightarrow \infty$  としたものと同じである。したがって、図 2(A)の根軌跡 A がヨー共振の根軌跡に相当するものと思われる。

以上を総合すると、図 2(A)の二本の根軌跡には、それぞれヨー共振根とロール根とが混在していると思われる。

そこで、 $C_x$  の値だけを変更した根軌跡を図 2(B)~(E)に示す。図 2(A)(B)では、二本の根軌跡の間に実軸方向にギャップが、図 2(D)(E)では虚軸方向にギャップがあり、これらの境界が図 2(C)に示される、二本の根軌跡が 1 点で接する、すなわち重根を持つ。このように、重根を持つパターンを以後「重根パターン」と記す。このように 3 種類の根軌跡があることが分かった。以上の根軌跡を図 2(F)に重ね描きしてある。このような根軌跡は、平面 2 自由度と操舵系との連成運動にもみられる<sup>(20)</sup>。

4.2. ヨー共振根とロール根との境界

本節では、図 2(A)の根軌跡におけるヨー共振根とロール根との境界を考察する。

図 3 に、図 2(A)の緑色の 2 つの根軌跡におけるヨー共振根とロール根との境界を示す。この図は、図 2(A)(C)の一部を拡大し、さらに  $V$  を固定して  $C_x$  を変化させた根軌跡も重ね描きしたものである。 $V=93.7$  [km/h] のときの 2 本の根軌跡は、模式的には「>」「<」型の軌跡がそれぞれ左右に位置している。一方、 $V=93.8$  [km/h] のときは「V」「^」型がそれぞれ上下に位置している。このように両者の根軌跡の形態が異なるので、これらの  $V$  の間にヨー共振根とロール根との境界があると思われる。

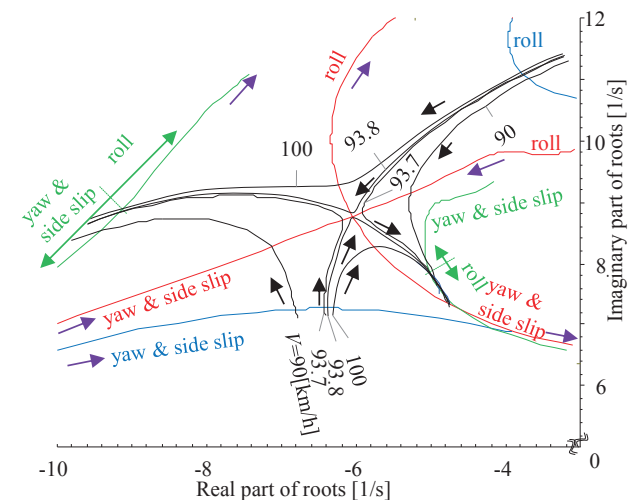


Fig. 3 Root loci plot as a function of vehicle speed or roll damping coefficient

また、「>」「<」型の軌跡と、「V」「^」型との間には、図2(C)の根軌跡の接点(重根)も含まれる。したがって、図2(A) (や(B))の根軌跡において、ヨー共振根とロール根の境界となる車速は、重根パターンの根軌跡において、重根となる車速であると思われる。そこで、この車速を以後「重根車速」と記し、その記号として $V_b$ を用いる。

図4に、図2(A)(C)(E)にそれぞれ対応するヨー共振周波数を示す。図2(A)の諸元では、重根車速において、ヨー共振周波数の値が不連続である。また、図2(C)の諸元では、ヨー共振周波数の値は連続ではあるが、その速度に対する勾配は、重根車速において不連続である。図2(E)の諸元では、ヨー共振周波数の値も勾配も連続である。このように、根軌跡のパターンの違いは、ヨー共振周波数と車速との関係にも表れる。

なお本諸元における $C_x$ の範囲は、2320~18600[Nm/(rad/s)]程度と思われる。なぜなら、ばね上共振周波数は1.0~2.0[Hz]に、その減衰比は0.2~0.8に設定されると指摘される<sup>(21)</sup>。このモデルでは前後輪のばね上質量はどちらも800[kg] (2輪分)であるから、ばね上共振周波数を1.0~2.0[Hz]に設定するための、前後輪のホイールレートはそれぞれ31.5~126[kN/m] (2輪分)になり、このとき減衰比を0.2~0.8に設定するための減衰係数は2011~16085[N/(m/s)] (2輪分)になる。この値を、トレッド1.52[m]としてロール減衰係数に換算すると $C_x=2323\sim18581$ [Nm/(rad/s)] (4輪分)になる。

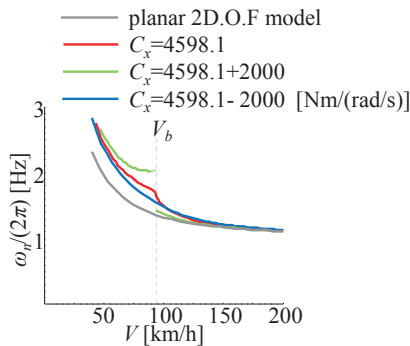


Fig.4 Yaw natural frequency as a function of  $V$

### 5. ヨー共振周波数の大域的性質

この章では、3種類の根軌跡の代表として、重根パターンにおけるヨー共振周波数の大域的性質を考察する。

#### 5.1 境界車速とロール共振周波数との関係

図5に、重根パターンのヨー共振周波数 $\omega_n$ とロール共振周波数 $\omega_x$ を示す。両者の大小関係は、 $V_b$ において入れかわる。

また、図5には、平面2自由度モデルのヨー共振周波数 $\omega_{n0}$ も記されている。 $\omega_{n0}$ と $\omega_n$ との乖離は、 $V_b < V$  ( $\omega_n < \omega_x$ )の領域よりも $V < V_b$  ( $\omega_x < \omega_n$ )の領域のほうが大きい。

さらに図5には式(18)に示される $\omega_{x@C.G.}$ や式(20)に示される $\omega_{x@R.A.}$ も示されている。 $V_b$ よりも低速側では $\omega_x \doteq \omega_{x@R.A.}$ であ

り、高速側では、高速になるにつれて $\omega_x$ は $\omega_{x@R.A.}$ に収束する。このように $V_b$ は、ロールモードの境界の目安であると思われる。すなわち、 $V < V_b$ の領域はロール軸まわりモードであり、 $V > V_b$ は重心まわりモードであり、それ以外は遷移領域である。

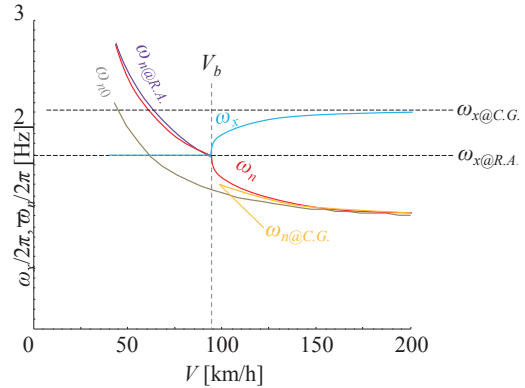


Fig.5 Relationships between yaw and roll natural frequencies and accuracies of approximated yaw natural frequencies ( $C_x=4598.1$ [Nm/(rad/s)])

#### 5.2 $\omega_x < \omega_n$ の車速域におけるヨー共振周波数の近似式

3.2節の2)の方法を使って、ヨー共振周波数の近似式を導く。まず、式(12)を因数分解した式を次式のように仮定する。

$$[A_2s^2 + A_1s + A_0] \cdot [B_2s^2 + B_1s + B_0] = 0 \quad (23)$$

ここで、 $A_0 \sim A_2$ および $B_0 \sim B_2$ は実数<sup>(16)</sup>である。また、上式第1[ ]が0と等しいとした式は(ロールと連成した)平面2自由度運動に対応する特性方程式を表し、第2[ ]が0と等しいとした式は(平面2自由度運動と連成した)ロール運動に対応する特性方程式を表すものとする。したがって、

$$\omega_n^2 = \frac{A_0}{A_2} \quad (24)$$

$$\omega_x^2 = \frac{B_0}{B_2} \quad (25)$$

である。

次に、 $\omega_n$ や $\omega_x$ と式(23)との関係を確認する。式(23)を展開すると次式を得る。

$$A_2B_2s^4 + (A_2B_1 + B_2A_1)s^3 + (A_2B_0 + B_2A_0 + 2A_1B_1)s^2 + (A_1B_0 + B_1A_0)s + A_0B_0 = 0 \quad (26)$$

上式の $s^4$ の係数と $s^0$ の係数との比は、式(24)(25)から

$$\frac{A_0B_0}{A_2B_2} = \omega_n^2 \omega_x^2 \quad (27)$$

となる。ここで $A_2B_2$ と $A_0B_0$ は、式(12)の $s^4$ の係数と $s^0$ の係数だから、

$$A_2B_2 = 2k_N^2IV^2I_x \quad (28)$$

$$A_0B_0 = 2(C_rV^2 - C_fV^2 + C_fC_r)K_x \quad (29)$$

の関係がある。したがって式(27)~(29)から、

$$\omega_n^2 \omega_x^2 = \frac{C_r V^2 - C_f V^2 + C_f C_r l K_x}{k_N^2 l V^2} \frac{K_x}{I_x} \quad (30)$$

の関係を得る。この式はあらゆる  $V$  において成立する。

最後に、 $\omega_n < \omega_n$  ( $V < V_b$ ) の領域の  $\omega_n$  を求める。図 5 から、 $\omega_n < \omega_n$  の領域では  $\omega_n \doteq \omega_{n@R.A.}$  と仮定し、式(20)を上式の  $\omega_x$  に代入し、 $\omega_n^2$  について整理すると、

$$\omega_{n@R.A.}^2 \approx \left( 1 + \frac{h^2 m}{I_x} \right) \frac{C_r V^2 - C_f V^2 + C_f C_r l}{k_N^2 l V^2} \quad (31)$$

となる。ここで  $\omega_{n@R.A.}$  は、 $\omega_n < \omega_n$  の領域の  $\omega_n$  である。式(31)を整理すると、

$$\begin{aligned} \omega_{n@R.A.} &\approx \sqrt{1 + \frac{h^2 m}{I_x}} \sqrt{\frac{C_r}{k_N^2 l} + \left( \frac{C_r}{V^2} - 1 \right) \frac{C_f}{k_N^2 l}} \\ &\approx \sqrt{1 + \frac{h^2 m}{I_x}} \omega_{n0} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。図 5 には、この計算結果も記されている。なお、 $I_x$  の目安は  $m \times$  重心高<sup>2</sup>と指摘されている<sup>(22)</sup>。重心高を 0.55[m]と仮定し、さらにロールセンタ高を 0.1[m]と仮定すると、 $h$  は 0.45[m]になる。よってこの仮定下では、 $I_x = 0.55^2 m$ 、 $h^2 m = 0.45^2 m$  だから、 $h^2 m / I_x \doteq 0.67$  となる。この値を式(32)に代入すると  $\omega_{n@R.A.} \doteq 1.3 \omega_{n0}$  となる。

### 5.3. $\omega_n < \omega_x$ の車速域におけるヨー共振周波数の近似式

文献(2)では、 $\omega_n \ll \omega_x$  と仮定することで、 $\omega_n$  の近似解を得ている。したがって、文献(2)の近似解は、 $\omega_n < \omega_x$  ( $V_b < V$ ) の領域のヨー共振周波数の近似解であると思われる。 $\omega_n < \omega_x$  の領域のヨー共振周波数を  $\omega_{n@C.G.}$  と記すと、文献(2)のヨー共振周波数は次式で表される<sup>(2)</sup>。

$$\omega_{n@C.G.} \approx \sqrt{1 + \left[ \frac{l_r}{l} \left( \frac{C_f}{V} \right)^2 + \frac{l_f}{l} \left( \frac{C_r}{V} \right)^2 \right] \frac{h^2 m}{K_x}} \sqrt{\frac{C_r}{k_N^2 l} + \frac{C_f}{k_N^2 l} \left( 1 - \frac{C_r l}{V^2} \right)} \quad (33)$$

図 5 には、 $\omega_{n@C.G.}$  の計算例も図示されている。

### 5.4. $V_b$ についての考察

$V_b$  は、ヨー共振根とロール根とが重根になる車速である。したがって、両者の共振周波数の値も等しいので、 $V_b$  において  $\omega_n = \omega_x$  である。したがって、式(32)と式(20)とが等しいとした式を  $V$  について解くことによって、

$$V_b \approx \sqrt{\frac{I C_f C_r}{k_N^2 \frac{1}{1 + \frac{h^2 m}{I_x}} \omega_{n@R.A.}^2 l + C_f - C_r}} \quad (34)$$

なる関係を得る。上式に数値を代入すると、上式の値は 93.7[km/h]となるので、図 3 の結果と近似した。

上式から、 $h^2 m / I_x$  が大きいほど、 $k_N$  が小さいほど、 $V_b$  は大きくなると思われる。

$V_b$  は、図 2(C)の重根になる  $V$  だけでなく、図 2(A)の根軌跡において、ヨー共振とロール根との境界の車速でもあった。

この理由は、 $s^4$  の方程式を、二つの  $s^2$  の方程式に因数分解した場合、その因数分解形は 2 種類あり、その境界が、重根であることが、操舵系と平面 2 自由度が連成した場合の  $s^4$  の特性方程式の厳密解で指摘されているからである。すなわち、操舵系と平面 2 自由度が連成した場合の  $s^4$  の特性方程式の場合、操舵系や車両の共振周波数は、文献(18)と(23)に記される 2 種類の式があり、その境界はフォースコントロールのスタビリティファクタ<sup>(24)</sup> $B=2$  である。このように、重根を境に、共振周波数の文字式が変わるので、重根車速  $V_b$  は、ロールと平面運動との連成についての指標となる車速であると思われる。

例えば、文献(2)では、式(33)の近似精度は、 $\omega_{C.G.} / \omega_{n0}$  を指標として考察されていたが、これよりも  $V_b$  を使った  $V / V_b$  の指標のほうが、より本質的であると思われる。

## 6. まとめ

本論文の内容をまとめると次のようになる。

- 1) 車速を変化させた場合の根軌跡は 3 種類あることを指摘した。二本の根軌跡に実軸方向にギャップがあるもの、虚軸方向にギャップがあるもの、二本の根軌跡が一点で接する(重根を持つ)ものである。
  - 2) ヨー共振周波数とロール共振周波数との大小関係は、重根を持つ車速で入れ替わった。
  - 3) 二本の根軌跡が一点で接する場合、重根車速の低速側のヨー共振周波数は、平面 2 自由度モデルのヨー共振周波数よりも約 3 割高かった。実軸方向にギャップがある場合は、さらに高かった。また、これらの場合のヨー共振周波数の車速に対する変化は不連続であった。そのため、これらの場合の操舵過渡応答性を評価する場合、評価をおこなう車速が重根車速の高速側か低速側かを区別することが重要である。
  - 4) そこで、二本の根軌跡が一点で接する場合の、重根車速よりも低速側におけるヨー共振周波数の近似式を提案した。
- 以上の知見が、さらなる操舵安定性の向上に少しでも貢献できれば幸いである。

## 記号

- $C_f(C_r)$ : 前輪(後輪)重力加速度が乗じられたコーナリング係数( $C_f=97.0$ ,  $C_r=200[(m/s^2)/rad]$ )
- $C_x$ : ロール減衰モーメント係数(特記なき時 4598.1[Nm/rad])
- $2F_f(2F_r)$ : 前輪(後輪)のコーナリングフォース
- $g$ : 重力加速度 (10[m/s<sup>2</sup>])
- $h$ : ロールアーム長 (0.45[m])
- $I_x$ : ロール慣性モーメント (525[kgm<sup>2</sup>])
- $I_z$ : ヨー慣性モーメント (2 675[kgm<sup>2</sup>])
- $j$ : 虚数単位 ( $j^2=-1$ )
- $2K_f(2K_r)$ : 前輪(後輪)等価コーナリングバワ

$K_x$ : ロール剛性 (100[kN/rad])  
 $k_N$ : ヨー慣性半径係数  $k_N$  (2 675[kgm<sup>2</sup>])  
 $l$ : ホイールベース ( $l = l_f + l_r$ )  
 $l_f$ : 前輪～重心間距離 (1.35[m])  
 $l_r$ : 重心～後輪間距離 (1.35[m])  
 $m$ : 車両質量 (1 600[kg])  
 $r$ : ヨー角速度  
 $s$ : ラプラス演算子  
 $V$ : 車速  
 $V_b$ : 境界車速  
 添字  $f, r, f$ : 前輪,  $r$ : 後輪  
 $\beta$ : 重心位置車体横滑り角  
 $\beta_f$ : 前輪位置車体横滑り角  
 $\beta_r$ : 後輪位置車体横滑り角  
 $\delta$ : 舵角  
 $\varphi$ : ロール角  
 $\omega_n$ : ヨー共振周波数 (無減衰固有振動数) [rad/s]  
 $\omega_x$ : ロール共振周波数 (無減衰固有振動数) [rad/s]

参 考 文 献

(1) 酒井英樹: ヨー共振モードについての基礎的研究(簡潔モデルの共振現象から解釈するヨー共振現象とドライバの評価用語との関係), 日本機械学会論文集, D-18-00014, p. 1-17 (2018) (掲載決定) (WEBにて早期公開中)  
 (2) 酒井英樹: ロール運動を考慮した自動車の平面運動モデル: 第2報(前後輪のコーナリングフォースの位相差の考慮), 日本機械学会論文集, Vol. 82, No. 843, p. 16-00314, p. 1-17 (2016)  
 (3) 平原道人: ロール慣性主軸の傾きが運動性能に与える影響, 自動車技術会学術講演会前刷集, No. 76-03, p. 9-14 (2003)  
 (4) 藤岡健彦, 山本真規: 自動車の断面一輪モデルとその特性 - 半世紀前のモデルを使ってロール運動の基礎を理解する, 自動車技術会学術講演会前刷集, No. 91-10, p. 19-24 (2010)  
 (5) 酒井英樹: ロール固有振動数についての一考察, 自動車技術会論文集, Vol. 46, No. 2, p. 385-391 (2015)  
 (6) 山本真規, 藤岡健彦: 車両パラメータのロール・平面連成運動への影響およびパラメータ間の相互関係, 自動車技術会 2015 年春季大会学術講演会講演予稿集, No. 31-15S, p. 753-758 (2015)  
 (7) 酒井英樹, 佐藤幸治: リヤサスペンション特性と車両運動性能の解析 - 第2報: ロールセンタ高が操舵応答に及ぼす影響, 自動車技術会論文集, Vol. 23, No. 3, p. 80-85 (1995)  
 (8) 酒井英樹, 佐藤幸治: リヤサスペンション特性と車両運動性能の解析 - 第1報: 複素  $C_p$  の提案とロールステアの解析, 自動車技術会論文集, Vol. 23, No. 2, p. 51-54 (1995)  
 (9) 藤岡健彦, 山本真規: ばね下座標系による, 車体のロール運動を考慮に入れた, 自動車の運動方程式 - 「シーゲルの畏」

を解く -, 自動車技術会学術講演会前刷集, No. 91-10, p. 13-18 (2010)  
 (10) 原田宏: サスペンションおよびステアリング系のコンプライアンスを考慮した操安性理論, トヨタ技術, Vol. 27, No. 3, p. 399-408 (1977)  
 (11) 安部正人: 自動車の運動と制御, 東京電機大出版局 (2011)  
 (12) 北浜謙一, 酒井英樹: 正規化したコーナリングパワーを用いた自動車の操舵応答性能の同定法, 機械学会論文集 C 編, Vol. 65, No. 633, p. 1960-1965 (1999)  
 (13) 酒井英樹: フォースコントロール下の固有振動数についての一考察, 機械学会論文集, Vol. 81, No. 824 (2015).  
 (14) 酒井英樹: 自動車運動力学～気持ちよいハンドリングのしくみと設計～, 森北出版, 205. p (2015)  
 (15) 酒井英樹: 輪軸の蛇行動の負の減衰に関する理論的考察, 日本機械学会論文集, Vol. 83, No. 854, No. 17-00064, p. 1-14 (2017).  
 (16) 日本機械学会編, 車両システムのダイナミクスと制御, 養賢堂, pp. 116-127 (2008)  
 (17) 坂下和夫ほか: 操舵系の特性を考慮した自動車の操縦安定性に関する線形理論, 自動車技術, Vol. 18, No. 4, p. 268-273 (1964).  
 (18) 酒井英樹: フォースコントロールにおいて不安定領域を有する車両の動的挙動についての基礎的研究, 日本機械学会論文集, Vol. 81, No. 823, p. 14-0038, p. 1-17 (2015)  
 (19) 酒井英樹, 穂積仁, 杉山瑞穂: ロール特性が車両運動に及ぼす影響, 自動車技術会学術講演会前刷集, No. 121-05, p. 13-18 (2005)  
 (20) 酒井英樹: フォースコントロール下の操舵系と車体系の運動特性の数値的研究, 自動車技術会論文集, Vol. 44, No. 3, p. 843-850 (2013)  
 (21) 自動車技術会編: 自動車の運動性能向上技術 (普及版), 朝倉書店, p. 92 (2008)  
 (22) 酒井英樹, 山本泰: 過渡的な旋回感覚を強調する減衰力制御 - カルマンフィルタを用いたロール・ピッチ同期化制御 -, 自動車技術会論文集, Vol. 45, No. 3, p. 709-716 (2012)  
 (23) 酒井英樹: フォースコントロール応答性に関する考察 - 基礎的考察 -, 自動車技術会論文集, Vol. 45, No. 6, p. 1013-1020 (2014)  
 (24) 酒井英樹: フォースコントロールにおける安定性とその指標, 自動車技術会論文集, Vol. 44, No. 2, p. 441-448 (2013)