

輪軸の蛇行動の負の減衰に関する理論的考察

酒井 英樹^{*1}

A theoretical consideration to negative damping of hunting of wheelset

Hideki SAKAI^{*1}^{*1} Kindai Univ. Dept. of Robotics Engineering

1 Umenobe, Takaya, Higashihiroshima-shi, Hiroshima 739-2116, Japan

Received: 20 February 2017; Revised: 22 May 2017; Accepted: 28 July 2017

Abstract

This paper considers ways to increase stability of wheelset hunting. The aim of this study is to introduce formulas which represent the damped natural frequency and its damping. This has been done by analytical and not by numerical calculation. These formulas are functions of mass, creep coefficient and other wheelset parameters. These formulas are obtained with a 2 degree of freedom wheelset model whose radius of gyration of yaw equals to a half of gauge and whose creep coefficient is isotropic, in the first part of this paper. In the second part, based on one of these formulas, ways to increase damping of wheelset hunting are discussed. First, it is shown that a longer wavelength of geometrical hunting is effective in reducing hunting at all vehicle speeds. Secondly, it is shown that at speeds slower than a certain speed, the damping is increased when the ratio of the wheelset mass to the creep coefficient is larger. Further, a symbolic formula for this boundary speed is obtained. Thirdly, if it is assumed that the wheelset mass is proportional to the square of the wheel radius, then at speeds higher than a certain speed, the damping is increased when the wheel radius is larger. Moreover a symbolic formula for this boundary speed is also obtained.

Keywords : Wheelset, Track, Hunting, Damping, Analytical solution, Formula

1. 緒 言

鉄道車両に蛇行動が生じると、乗心地が悪化したり、場合によっては脱線の危険がある。蛇行動を生じにくくするために、輪軸を、台車枠に対してある特定の範囲の前後・左右の剛性で支持するが、それでも高速になると蛇行動が生じる（日本機械学会編，2008）。蛇行動が生じる原因は、車輪踏面の勾配に起因する（弘津他，1984）ので、輪軸単体の蛇行動が生じにくいほど、車両系の蛇行動も生じにくい傾向があると思われる。

そこで本論文は、車両系の蛇行動の抑制のために、輪軸単体の蛇行動の低減法を考察する。輪軸の蛇行動のうち、幾何学的蛇行動は周知であるから、本論文では動的蛇行動として、輪軸単体の蛇行動を表す特性根の負の減衰の減少法（すなわち減衰の増加法）を考察するものである。そのため、本論文では輪軸単体の蛇行動を以後、単に蛇行動と記す。本論文の前半部では、各設計諸元による蛇行動の抑制に関する見通しを得るために、最適支持剛性を表す文字式の関数（須田他，1986）にならって、蛇行動の減衰と波長を文字式で表す。この文字式を基に、後半部では、減衰を増加させる方策を考察する。

2. 輪軸の基本的性質

2・1 モデル

図1に示される輪軸のモデルを用いる。軌道は直線とし、軌道の中心線と車軸中心線との交点に原点 o を設定する。軌道の方向に x 軸を、枕木方向に y 軸を、輪軸が左旋回する方向に正のアタック角 ψ を定める。また輪軸

No.17-00064 [DOI:10.1299/transjsme.17-00064], J-STAGE Advance Publication date : 14 August, 2017

本論文は、第25回交通・物流部門大会 講演論文集(2016), No.1101の掲載内容に基づいた論文である。

^{*1} 正員, 近畿大学工学部 (〒739-2116 広島県東広島市高屋うめの辺 1)

E-mail of corresponding author: sakai@hiro.kindai.ac.jp

の x 軸方向の速度を V とする. なお ψ は微小とし, $\sin\psi \doteq \tan\psi \doteq \psi$ および $\cos\psi \doteq 1$ が成り立つものとする.

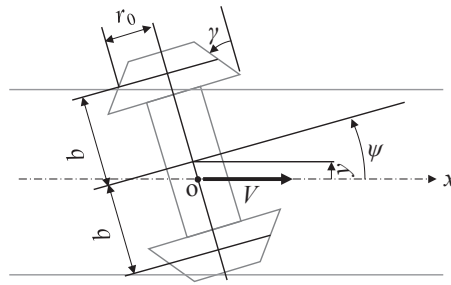


Fig. 1 Model of wheelset and track

次に, 輪軸の性質を表す記号として, 輪軸の質量を m , $y=0$ かつ $\psi=0$ のときの車輪の転がり回転半径を r_0 , 踏面勾配を γ , ヨー慣性半径を i , レールと車輪との接触点から軌道の中心までの距離を b , 前後クリープ係数を κ_{11} , 左右クリープ係数を κ_{22} と記す.

このモデルの並進および回転についての運動方程式はそれぞれ次式で与えられる (日本機械学会編, 2008).

$$m\ddot{y} = -\frac{2\kappa_{22}}{V}\dot{y} + 2\kappa_{22}\psi \quad (1)$$

$$mi^2\ddot{\psi} = -\frac{2\kappa_{11}b^2}{V}\dot{\psi} - \frac{2\kappa_{11}b\gamma}{r_0}y \quad (2)$$

式(1), (2)の初期条件を全て 0 としてラプラス変換をおこない, その特性方程式を求めると次のようになる.

$$s^4 + \frac{2(b^2\kappa_{11} + i^2\kappa_{22})}{i^2mV}s^3 + \frac{4b^2\kappa_{11}\kappa_{22}}{i^2m^2V^2}s^2 + \frac{4b\kappa_{11}\kappa_{22}\gamma}{i^2m^2r_0} = 0 \quad (3)$$

ここで s はラプラス演算子である. 式(3)に示されるように, 輪軸の蛇行動を表す特性方程式は s の 4 次式である.

2・2 特性方程式が s の 3 次式以上の場合の解析法

もしも特性方程式が s の 2 次式であれば, 固有振動数や減衰比が定式化できるので, 蛇行動についての見通しを文字式で得ることができる. しかし式(3)は s の 4 次式である. このような場合の解析手法は次の 3 つがあると思われる.

- 1) 安定領域と不安定領域との臨界条件を定式化し, その式を考察する.
- 2) s の 4 次式を, s の 2 次式に近似して, 固有振動数や減衰比を近似的に定式化する.
- 3) s の 4 次式を因数分解して, 2 つの s の 2 次式に分解し, それぞれの固有振動数や減衰比を定式化する.

上記 1) の例に, 静止系から弾性的に支持されている場合の輪軸の蛇行動における臨界速度の考察 (須田他, 1986) がある. この方法は本論文には適さないことを 2・4 節で述べる.

上記 2) の一例が, 次節で述べる幾何学的蛇行動 (日本機械学会編, 2008) である. 幾何学的蛇行動の場合, 減衰が 0 であるから, この方法も本論文には適さない.

そこで本論文が用いるのが上記 3) である. 3) の例の既往研究として, 自動車においてハンドルから手を放す場合の運動解析がある. 図 1 に示される輪軸を, 舵を中立位置で固定した場合の自動車とみなすと, その自由度は $\dot{\psi}$ と \dot{y} の 2 自由度なので, 自動車の運動方程式も式(1),(2)に準じた形式になる. ただし, 自動車には ψ と y の項がないので, その特性方程式は s の 2 次式である. この状態から, ハンドルから手を放した場合は, 操舵系の自由度も加味されるので, その特性方程式は s の 4 次式になる. この 4 次式が特殊な場合に厳密に因数分解されたり (酒井, 2015a), 一般的な場合に近似的に因数分解された (酒井, 2015b) のが 3) の例である.

2・3 幾何学的蛇行動の固有振動数

前節2)の方法として、式(3)の記号解を求める従来の方法（日本機械学会編，2008）について述べる．まず，

$$m=0 \quad (4)$$

と仮定する．式(3)の両辺に m^2 を乗じた上で，式(4)を代入することにより，式(3)は，

$$\frac{b}{V^2}s^2 + \frac{\gamma}{r_0} = 0 \quad (5)$$

となる．したがって $m=0$ の場合の固有振動数を ω_{st} と記すと

$$\omega_{st} = \sqrt{\frac{V^2\gamma}{br_0}} \quad (6)$$

となる．これが幾何学的蛇行動の固有振動数である．また， ω_{st} を波長 S_1 で表すと，

$$S_1 = 2\pi \frac{V}{\omega_{st}} = 2\pi \sqrt{\frac{br_0}{\gamma}} \quad (7)$$

となる（日本機械学会編，2008）．式(5)において減衰比は0だから，2)の方法は，本論文には適さないと思われる．

2・4 蛇行動の安定性

2・2節の1)の方法として，本節では Hurwitz の安定判別（新，1996）を式(3)について行ない，安定と不安定との臨界条件の考察を試みる．

式(3)が安定であるためには，次の2つの条件が同時に満たされる必要がある．1つ目の条件は，式(3)の s の係数の符号がすべて等しいことである．式(3)の場合， γ が正ならば，すべての係数が正になるので，この条件は満たされている（ γ が負ならば，この条件が満たされないで輪軸は常に不安定である）．もう1つの条件は Hurwitz の首座小行列式の符号についてである．式(3)の場合， s^4 の係数が正なので，次の2つの首座小行列式の値がすべて正であることが安定性を満たすための2つ目の条件である．

$$\begin{vmatrix} \frac{2(b^2\kappa_{11} + i^2\kappa_{22})}{i^2mV} & 0 \\ 1 & \frac{4b^2\kappa_{11}\kappa_{22}}{i^2m^2V^2} \end{vmatrix} = \frac{2(b^2\kappa_{11} + i^2\kappa_{22})}{i^2mV} \frac{4b^2\kappa_{11}\kappa_{22}}{i^2m^2V^2} > 0 \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{2(b^2\kappa_{11} + i^2\kappa_{22})}{i^2mV} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{4b^2\kappa_{11}\kappa_{22}}{i^2m^2V^2} & \frac{4b\kappa_{11}\kappa_{22}\gamma}{i^2m^2r_0} \\ 0 & \frac{2(b^2\kappa_{11} + i^2\kappa_{22})}{i^2mV} & 0 \end{vmatrix} = - \left[\frac{2(b^2\kappa_{11} + i^2\kappa_{22})}{i^2mV} \right]^2 \frac{4b\kappa_{11}\kappa_{22}\gamma}{i^2m^2r_0} < 0 \quad (9)$$

γ が正ならば, 式(9)は常に負であるから, 2つ目の条件は常に満たされない. よって, 輪軸は常に不安定である. そのため, 安定と不安定との臨界条件が存在しない. したがって, 1) の方法も, 本論文には適さない.

3. 蛇行動の減衰

2・2節の 1) の方法も 2) の方法も輪軸単体の蛇行動の減衰の考察には適さないと思われる. そこで本論文では 3) の方法として, 式(3)を近似的に因数分解することによって, 減衰を定式化する.

3・1 仮定

本論文では, 式(3)を近似的に解くための仮定として,

$$i = b \quad (10)$$

かつ

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa \quad (11)$$

とする. 式(4)の仮定は用いない.

3・2 特性方程式

式(10)~(11)を式(3)に代入すると

$$s^4 + 2\left(\frac{2\kappa}{mV}\right)s^3 + \left(\frac{2\kappa}{mV}\right)^2 s^2 + \frac{\gamma W^2}{r_0 b} \left(\frac{2\kappa}{mV}\right)^2 = 0 \quad (12)$$

となる. ここからしばらくは, 表記を簡単にするために

$$K_{mV} \equiv \frac{2\kappa}{mV} \quad (13)$$

と一時的におく. 式(13)を式(12)に代入すると

$$s^4 + 2K_{mV}s^3 + K_{mV}^2 s^2 + \omega_{st}^2 K_{mV}^2 = 0 \quad (14)$$

となる. なお, K_{mV} の次元は ω_{st} のそれと同様, 角速度と考えることができる.

3・3 特性方程式の複二次式化とその解

式(14)を数値的に解いた例を表1に示す. 表1に示されるように, 今回の諸元では, 二組の根の虚部の絶対値が互いに等しかった. そこで「二組の根の虚部の絶対値が互いに等しい」と仮定すると, 式(14)の二組の根は次のように書ける.

$$s = a \pm bj \quad (15)$$

$$s = c \pm bj \quad (16)$$

ここで, a, b, c はそれぞれ実数であり, j は虚数単位である. 式(15), (16)に記される 4 根を解に持つ変数 s の方程式は, 次のように書ける.

$$(s-a-bj)(s-a+bj)(s-c-bj)(s-c+bj) \\ = s^4 - 2(c+a)s^3 + (a^2 + 2b^2 + c^2 + 4ca)s^2 - 2(c+a)(b^2 + ca)s + (a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = 0 \quad (17)$$

式(17)の s^3 および s^1 の係数には $2(c+a)$ の項がある. したがって, この項が 0 になるような新たな変数 s' で s を置き換えると, s^3 および s^1 の係数が同時に 0 になるので, 式(17)は s' についての複二次式になる. この複二次式を二次方程式の解の公式を用いて解いた後で, s に再変換することによって s の記号解が求められるはずである.

そこで, この変数変換を行う. $2(c+a)$ は s の 4 根の実部の総和と等しいから, 4 根の実部の総和が 0 になるように s' を定めれば良い. よって, s の 4 根の実部の総和 $2(c+a)$ を 4 等分した $2(c+a)/4$ を s から引いたものが s' になるはずである. したがって 4 つの s' は, 式(15), (16)から,

$$s' \equiv s - \frac{2(a+c)}{4} = \left[a - \frac{2(a+c)}{4} \right] \pm bj \quad (18)$$

$$s' \equiv s - \frac{2(a+c)}{4} = \left[c - \frac{2(a+c)}{4} \right] \pm bj \quad (19)$$

と書ける. ここで $-2(c+a)$ は, 式(17)と式(14)のそれぞれの s^3 の係数どうしを比較することによって,

$$-2(c+a) = 2K_{mV} \quad (20)$$

である. この式を, 式(18)または式(19)に代入すると

$$s' = s + \frac{2K_{mV}}{4} \quad (21)$$

となる. この s' を式(14)に代入し, 整理すると,

$$s'^4 - \frac{K_{mV}^2}{2} s'^2 + \left(\omega_{st}^2 K_{mV}^2 + \frac{K_{mV}^2}{16} \right) = 0 \quad (22)$$

となる. 式(22)は, 前述のように s'^2 についての二次方程式である (よって本節第一段落の仮定は正しい). そこで, 式(22)を, 二次方程式の解の公式を用いて s'^2 について解くと,

$$s'^2 = \left(\frac{K_{mV}}{2} \right)^2 \left(1 \pm 4 \frac{\omega_{st}}{K_{mV}} j \right) \quad (23)$$

となる. この式の正負の平方根をとると

$$s' = \pm \frac{K_{mV}}{2} \sqrt{1 \pm 4 \frac{\omega_{st}}{K_{mV}} j} \quad (24)$$

となる。この式の根号内は複素数であるから、 s' も複素数である。ただし、根号のために、実部と虚部とが分離されていない。

Table 1 Numerical example of roots of eq. (12): These calculations are conducted with the following parameters: $m=1600$ [kg], $b=i=0.6$ [m], $\kappa=(7.55+6.77)/2$ [MN/rad], $\gamma=1/20$ [rad], $r_0=0.43$ [m]. Imaginary parts of two pairs of roots were consistent.

V [m/s]	A pair of roots		The other pair of roots	
	Real part [1/s]	Imaginary part [1/s]	Real part [1/s]	Imaginary part [1/s]
80	-7.93873	± 30.8410	119.814	± 30.8410
100	-11.9170	± 34.7647	101.417	± 34.7647
120	-15.4763	± 37.3334	90.0596	± 37.3334

3・4 解の虚部と実部との分離

この節では、二次方程式の解と係数の関係を利用して、式(24)の実部と虚部とを分離する。まず、式(24)の s' を次のように識別する。

$$s'_1 = + \frac{K_{mV}}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{st}}{K_{mV}} j} \quad (25)$$

$$s'_2 = + \frac{K_{mV}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{\omega_{st}}{K_{mV}} j} \quad (26)$$

$$s'_3 = - \frac{K_{mV}}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\omega_{st}}{K_{mV}} j} \quad (27)$$

$$s'_4 = - \frac{K_{mV}}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{\omega_{st}}{K_{mV}} j} \quad (28)$$

実部が共に正の s'_1 と s'_2 とが一組の共役複素根を、実部が共に負の s'_3 と s'_4 とがもう一組の共役複素根をそれぞれ構成する。ここで、 s'_1 と s'_2 を根に持つ方程式は

$$(s' - s'_1)(s' - s'_2) = 0 \quad (29)$$

だから、これを展開すると

$$s'^2 - (s'_1 + s'_2)s' + s'_1 s'_2 = 0 \quad (30)$$

となる。ここで s'_1 と s'_2 の実部が共に正であることに注目すると、上式は

$$s^2 - \sqrt{(s'_1 + s'_2)^2} s' + s'_1 s'_2 = 0 \quad (31)$$

と変形できる. 式(31)に式(25), (26)を代入すると

$$s^2 - \frac{K_{mV}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}}} s' + \frac{K_{mV}^2}{4} \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}} = 0 \quad (32)$$

となる. したがって, 二次方程式の解の公式より, s' は

$$s' = \frac{K_{mV}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}}} \pm \frac{K_{mV}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2} - 1} j \quad (33)$$

となる. この式のすべての根号内は正だから, 式(33)の右辺第1項は実数, 第2項は純虚数である. したがって, この式が, 式(24)の実部と虚部とを分離した式である.

3・5 特性根の定式化

式(33)の s' を, 式(21)を使って s に戻すと

$$s = \left(\frac{K_{mV}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}}} - \frac{K_{mV}}{2} \right) \pm \left(\frac{K_{mV}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2} - 1} \right) j \quad (34)$$

となる. この実部に-1を乗じたものが, 無減衰固有振動数 ω_n と減衰比 ζ との積だから

$$\zeta \omega_n = -\frac{K_{mV}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}}}{2} - 1 \right) = -\frac{\kappa}{mV} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{m^2}{\kappa^2} \frac{\gamma}{br_0} V^4}}{2} - 1 \right) < 0 \quad (35)$$

となる. 一般に $\zeta \omega_n$ が振動の減衰の速さを表すが, この式の値は負なので, s'_1 と s'_2 に由来する $\zeta \omega_n$ は発散の速さを表す. また式(34)の虚部が, 減衰固有振動数 ω_d を表すから,

$$\omega_d = \frac{K_{mV}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2} - 1} = \frac{\kappa}{\sqrt{2}mV} \sqrt{1 + 4 \frac{m^2}{\kappa^2} \frac{\gamma}{br_0} V^4 - 1} \quad (36)$$

となる. 式(36)に示される ω_d を波長 S_1 に換算すると

$$S_1 = 2\pi \frac{V}{\omega_d} = 2\pi \frac{\sqrt{2}mV^2}{k \sqrt{1 + 4 \frac{m^2}{\kappa^2} \frac{\gamma}{br_0} V^4 - 1}} \quad (37)$$

となる。

一方, s'_3 と s'_4 についても, s'_3 と s'_4 の実部が共に負であることに留意して, 式(32)~(36)と同様に特性根の実部と虚部を求めると, それぞれ

$$\zeta\omega_n = \frac{K_{mV}}{2} \left[\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}}}{2}} + 1 \right] = \frac{\kappa}{mV} \left[\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{m^2}{\kappa^2} \frac{\gamma}{br_0} V^4}}{2}} + 1 \right] > 0 \quad (38)$$

$$\omega_d = \frac{K_{mV}}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 + 16 \frac{\omega_{st}^2}{K_{mV}^2}} - 1 = \frac{\kappa}{\sqrt{2}mV} \sqrt{1 + 4 \frac{m^2}{\kappa^2} \frac{\gamma}{br_0} V^4} - 1 \quad (39)$$

となる。式(38)の値は正だから, s'_3 と s'_4 に由来する根は安定根である。また式(39)は式(36)と同値である。したがって, 式(35),(36),(38)が, 式(10),(11)の仮定下の特性根の厳密解の記号解である。

4. 記号解の検証

4.1 近似精度

道辻の資料 (2015) に記載されている値を用いた場合の数値解と, $\kappa = (\kappa_{11} + \kappa_{22})/2$ として式(35),(36),(38)を用いて計算した結果との比較を図 2 に示す。この数値は図 2 のキャプションに記載してある。また, i の値が不明だったので $i=b$ とした。以後, この数値を基準諸元と記す。

両者の比較から, 基準諸元においては, 式(11)の仮定の影響は顕著でないように見える。なお, 以後本論文では, 不安定根を表す式(35),(36)だけについて扱う。そのため, 「負の減衰の減少」を単に「減衰の増加」と以後記す。

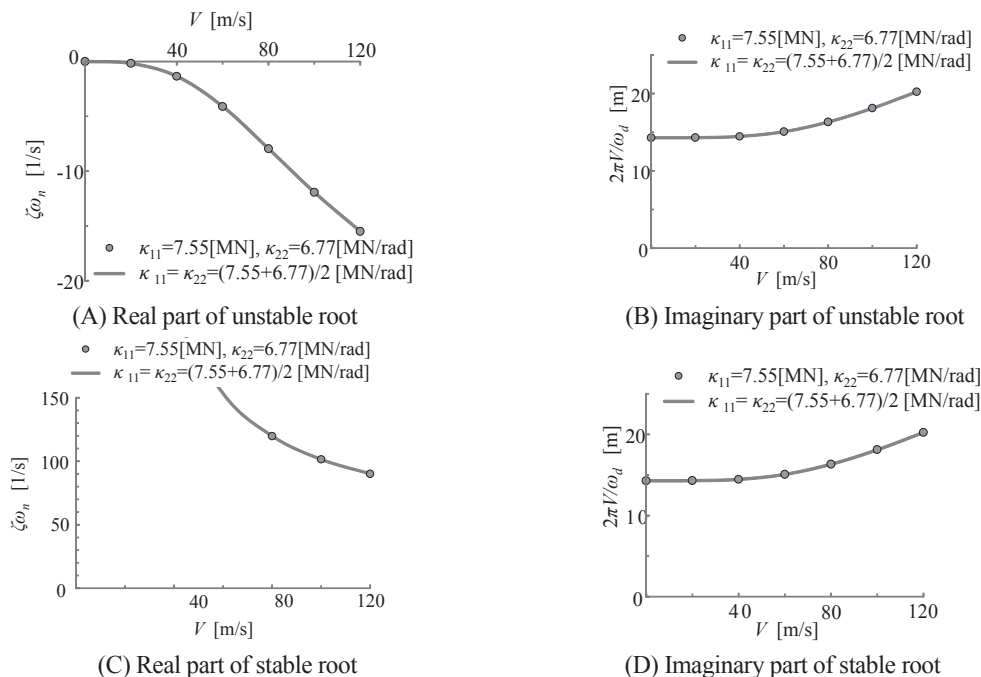


Fig. 2 Example of calculation; These calculations are conducted with the following parameters: $m=1600$ [kg], $b=0.6$ [m], $\kappa_{11}=7.55$ [MN], $\kappa_{22}=6.77$ [MN/rad], $\gamma=1/20$ [rad], $r_0=0.43$ [m]. In addition, $i=b$. These lines were calculated with eq. (35) and (36). These dots are numerical solutions of eq. (3). From these figures, it is thought that eq. (35),(36) and (38) express fundamentals of the hunting of wheelset.

4・2 クリープ係数の前後と左右との比の近似誤差

基準諸元では $\kappa_{22}/\kappa_{11}=0.88$ であるが、 κ_{22}/κ_{11} の下限値は 0.8 との指摘がある（振動工学ハンドブック編集委員会編, 1991）. そこで、この下限値を想定して、図2の諸元において $\kappa_{11}+\kappa_{22}$ の値を一定のまま、 $\kappa_{22}/\kappa_{11}=0.8$ として計算した結果を図3に示す. この場合も、式(11)の仮定の影響は顕著でないように思われる.

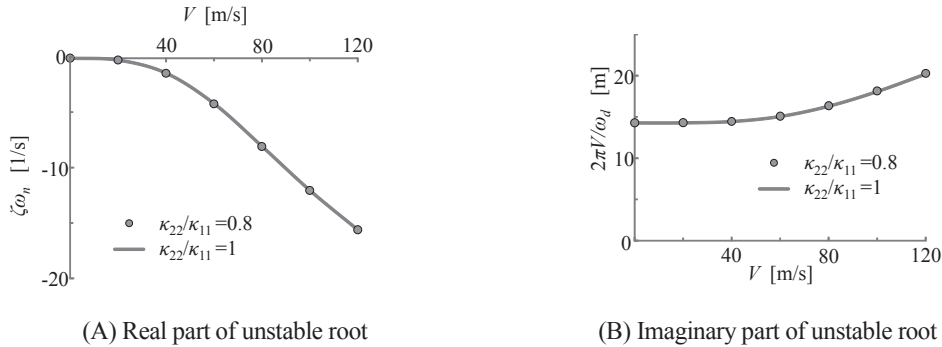


Fig. 3 Error due to the ratio of longitudinal creep ratio κ_{11} to that of lateral κ_{22} : This calculation is conducted with the values described in fig.2 except κ_{11} and κ_{22} . In this calculation, $\kappa_{11}+\kappa_{22}=7.55+6.77$ [MN] is assumed. These lines were calculated with eq. (35) and (36). These dots are numerical solutions of eq. (3). In case of $\kappa_{22}/\kappa_{11}=0.8$, the approximation as $\kappa_{22}/\kappa_{11}=1$ dose not yield any significant difference.

4・3 慣性半径の近似誤差

輪軸のうち、車輪分のヨー慣性半径は b である. 一方、車軸を長さ $2b$ の一様な棒と見なすと、その慣性半径は $b/3^{1/2}$ である（小野寺, 矢野, 2014）. したがって、輪軸全体の慣性半径は b よりも小さいものと思われる. そこで図2の計算諸元から i/b を 0.95 に変更して、数値計算で求めた値と、式(35),(36)による値との比較を図4に示す. 図4に示されるように、蛇行動の基本的性質は式(35),(36)によって考察できると思われる. なお、 $\kappa_{22}/\kappa_{11}<1$ による誤差と $i/b < 1$ を無視した誤差とは、互いに打消しあう側に生じた.

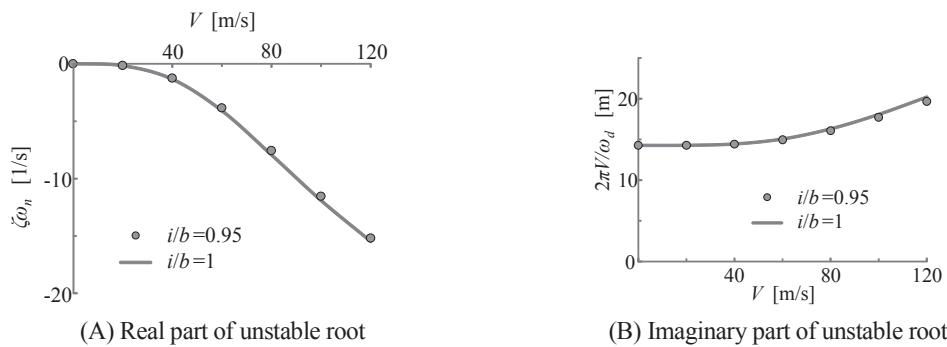


Fig. 4 Error due to the radius of gyration i : This calculation is conducted with the values described in fig.2 except i . Thus, in this calculation, b is constant. These lines were calculated with eq. (35) and (36). These dots are numerical solutions of eq. (3). Even in the approximation as $i/b=1$, the fundamental properties of $\zeta\omega_n$ and ω_d appear to be represented by equations (35) and (36), respectively.

4・4 記号解の成立範囲

以上の結果、式(35),(36),(38)は、少なくとも $1 \geq \kappa_{22}/\kappa_{11} \geq 0.8$ かつ $1 \geq i/b \geq 0.95$ の範囲で、蛇行動の基本的性質を表すものと思われる.

5. 考 察

5・1 特性根の大域的性質

本節では、 V に対する $\zeta\omega_n$ の大域的性質を考察する. まず、 $V=0$ 付近の基本的性質を考察するために、式(35)を V についてマクローリン展開すると

$$\zeta\omega_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{k}\right)\left(\frac{\gamma}{br_0}\right)V^3 + O(V)^7 \quad (40)$$

となる。したがって、 $V \approx 0$ 付近において、式(35)は上に凸の関数である。一方、 V が十分大きい領域の基本的性質を考察するために、 $V \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \zeta\omega_n = -4\sqrt{\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2\left(\frac{\gamma}{br_0}\right)} \quad (41)$$

となるので、 $\zeta\omega_n$ は一定値に収束する。したがって、ある V 以上では、式(35)は下に凸の関数である。これらの上に凸と下に凸との影響が互いに打ち消し合うのが、図 2(A)~4(A)における $V \approx 85$ [m/s]付近の変曲点であると思われる。

次に、 V に対する S_1 の大域的性質を考察する。 S_1 は、 $V \approx 0$ の付近では

$$S_1 = 2\pi\frac{V}{\omega_d} \approx 2\pi\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{k}\right)^2 V^4\right]\sqrt{\frac{br_0}{\gamma}} \quad (42)$$

であるから下に凸である。また、 $V \rightarrow \infty$ では

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \omega_d = 4\sqrt{\left(\frac{\kappa}{m}\right)^2\frac{\gamma}{br_0}} \quad (43)$$

となるので上に凸になる。図 2(B)~4(B)は、下に凸なので、式(42)の領域に対応するものと思われる。

式(40)~(43)は、 V を除くと、 κ/m と γ/br_0 との二つの項によって構成されている。そこで、次節以降では、これらの項に注目することによって、減衰の増加法を考察する。

5・2 幾何学的蛇行動の長波長化による減衰の増加法

前節最終段落で指摘された特性根を構成する 2 項のうちの一つが γ/br_0 である。 γ/br_0 の逆数の平方根に 2π を乗じたものが、幾何学的蛇行動の波長である。そこで本節では、幾何学的蛇行動の波長に注目する。静止系から弾性支持された輪軸が不安定になる臨界速度は、輪軸単体の幾何学的蛇行動波長に比例する(日本機械学会編, 2008)。一方、式(35)から、 γ/br_0 が小さいほど $\zeta\omega_n$ は大きくなる。したがって、幾何学的蛇行動の長波長化による臨界速度の増加は、 γ/br_0 の低減による $\zeta\omega_n$ の増加に起因すると思われる。そこで、これを確認したものが、図 5 である。ここでは、 γ を減少させることによって、図 5(B)に示されるように、蛇行動の波長を増加させた。その結果、図 5(A)から、予想どおり、減衰が増加したことが分かる。

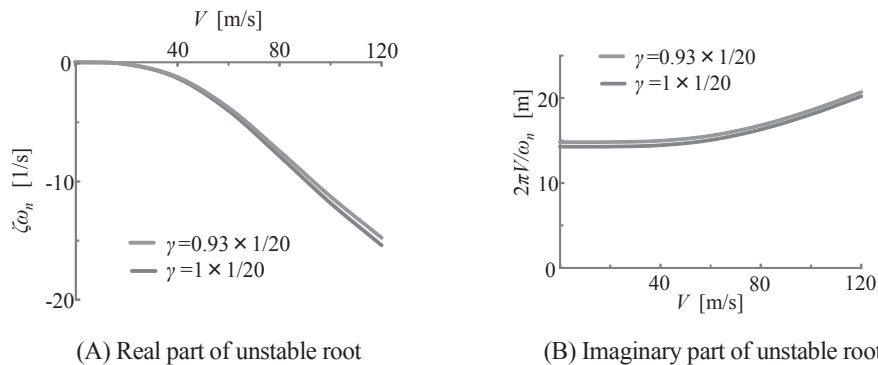


Fig. 5 Influence of the gradient of wheel tread γ : This calculation is conducted with the values described in fig.2 except γ . When the gradient of wheel tread γ decrease, $\zeta\omega_n$ increases at this V .

この減少率は、 V が増加するほど大きくなるはずである。なぜなら、式(40)に示したように、 $V \equiv 0$ では、 $\zeta\omega_n$ は γ/br_0 の1乗に比例するのに対し、 $V \equiv \infty$ では、式(41)から γ/br_0 の1/4乗に比例するからである。なお、 $1 > \gamma/br_0$ ならば、 $(\gamma/br_0)^{1/4} > (\gamma/br_0)^1$ である。

以上のように、幾何学的蛇行動の長波長化による蛇行動の抑制は、弾性支持された輪軸だけでなく、輪軸単体においても有効である。ただし両者の因果関係としては、輪軸単体の蛇行動の減衰が増加した結果として、弾性支持された輪軸の蛇行動の臨界速度が増加するものと思われる。

5・3 車輪質量に注目した減衰の増加法

本節では輪軸の軽量化等による減衰の増加を検討する。 m が変化すると輪重が変化し、 κ も変化する。ここで κ は輪重2/3乗に比例する(横瀬, 1971)と仮定する。そこで

$$\kappa = q(m+M)^{\frac{2}{3}} \quad (44)$$

と記す。ここで M は、 $(M+m)g$ が輪重になるように定義される量である(g は重力加速度)。すなわち2軸台車の場合の M は、輪軸を除いた車両質量の1/4である(連接車を除く)。また q は比例定数であり、基準諸元と整合するように設定される。

m が $\zeta\omega_n$ に及ぼす影響の目安として、 m を微小に変化させても、 $\zeta\omega_n$ が変化しない V を求める。この V において

$$\frac{\partial \zeta\omega_n}{\partial m} = 0 \quad (45)$$

が成り立つ必要がある。この V は、式(44)を考慮した場合、解析的には求まらない。式(44)に記される輪重の2/3乗は、輪重の1乗と輪重の0乗との間にある。そこで両者の場合を定式化する。まず前者の場合として

$$\kappa = q'(m+M) \quad (46)$$

と仮定する。ここで q' は定数であり、基準諸元と整合するように設定される。上式を式(35)に代入したものをさらに式(45)に代入し、それを満たす V を求めると

$$V = \sqrt[4]{(2+\sqrt{5}) \left(1 + \frac{M}{m}\right) \frac{br_0}{\gamma} \left(\frac{\kappa}{m}\right)^2} \quad (47)$$

となる。したがって M/m が小さいほど、すなわち m が大きいほどこの V が低速側に移動する。一方、輪重の0乗、すなわち κ 一定として、式(35)を式(45)に代入し、それを満たす V を求めると

$$V = \frac{\sqrt{2}}{5} \sqrt[4]{(2+\sqrt{5}) \frac{br_0}{\gamma} \left(\frac{\kappa}{m}\right)^2} \quad (48)$$

となる。この場合も、 m が大きいほどこの V が低速側に移動する。両者の結果から、 κ が輪重の2/3乗の場合も m が大きいほどこの V が低速側に移動するものと思われる。そこで式(47)および式(48)によって表される V に注目する。

式(47)、(48)に基準諸元を代入すると、どちらも $V=144.6$ [m/s]になった。そこで、この V よりも低速側での $\zeta\omega_n$ の増加を狙って、輪軸の軽量化によって κ/m を増加させた場合の計算結果を図6に示す。予想通り、少なくとも $0 \leq V \leq 120$ [m/s]の範囲において $\zeta\omega_n$ が増加した。

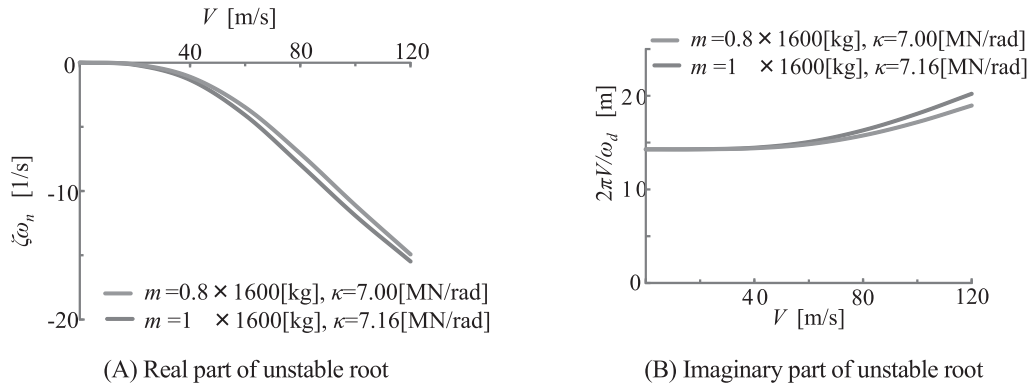


Fig. 6 Influence of the mass of wheelset m : This calculation was conducted with the values described in fig.2 except m and κ . κ is determined by eq. (44). Further m is assumed 4150[kg]. Reduction of m increases $\zeta\omega_n$.

5・4 車輪の大径化による減衰の増加法

5.2 節では、幾何学的蛇行の長波長化によって $\zeta\omega_n$ を増加できることを示した。長波長化を r_0 の増加によっても図った場合、 m も増加する可能性がある。 m が変化すると、前節で述べたように $\zeta\omega_n$ も変化する。そこで本節では、 r_0 が増加すると m も増加すると仮定したときの r_0 が $\zeta\omega_n$ に及ぼす影響を考察する。

簡単のため m は、枕木方向から見た車輪面積に比例すると仮定し、

$$m = pr_0^2 \tag{49}$$

とおく。ここで p は比例定数であり、基準諸元における r_0 と m との関係为满足するように設定される。

次に r_0 が $\zeta\omega_n$ に及ぼす影響の目安として、 r_0 を微小に変化させても、 $\zeta\omega_n$ が変化しない V を求める。ただし式(44)を適用すると記号解を求めることは困難なので、この V を求めるときは、 m が変化しても、 κ は一定とする。そこで、式(49)だけを式(35)に代入すると

$$\zeta\omega_n = -\frac{\kappa}{pr_0^2 V} \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4 \frac{pr_0^2}{\kappa^2} \frac{\gamma}{br_0} V^4}}{2}} - 1 \right) \tag{50}$$

となる。次に、ある r_0 を微小に変化させても、この $\zeta\omega_n$ が変化しない V を求める。この V において

$$\frac{\partial \zeta\omega_n}{\partial r_0} = 0 \tag{51}$$

が成り立つ。そこで、式(50),(51)を解いてこの V を求めると

$$V = \frac{\sqrt{2}}{5} \sqrt[4]{(47 + 9\sqrt{89}) \left(\frac{\kappa}{pr_0^2} \right)^2 \frac{b}{r_0}} \tag{52}$$

となる。

この V よりも低速側では、 r_0 が小さい方が、高速側では r_0 が大きい方が、減衰が増加する。したがって、この V を、 r_0 が $\zeta\omega_n$ に及ぼす影響を考察する上での指標とする。

この V は、基準諸元では $V=96.6[\text{m/s}]$ であった。そこで、この V よりも高速側における減衰の増加を狙って、 r_0 を基準諸元の 1.2 倍したときの影響を図 7 に示す。図 7 の計算において、 κ の計算には式(44)を用いた。図 7 において、目安である $V=96.6[\text{m/s}]$ よりも低い $V=87[\text{m/s}]$ の高速側で $\zeta\omega_n$ が増加した。したがって本諸元における車輪の大径化による蛇行の低減策は、質量およびクリープ係数を考慮しても、有効であった。

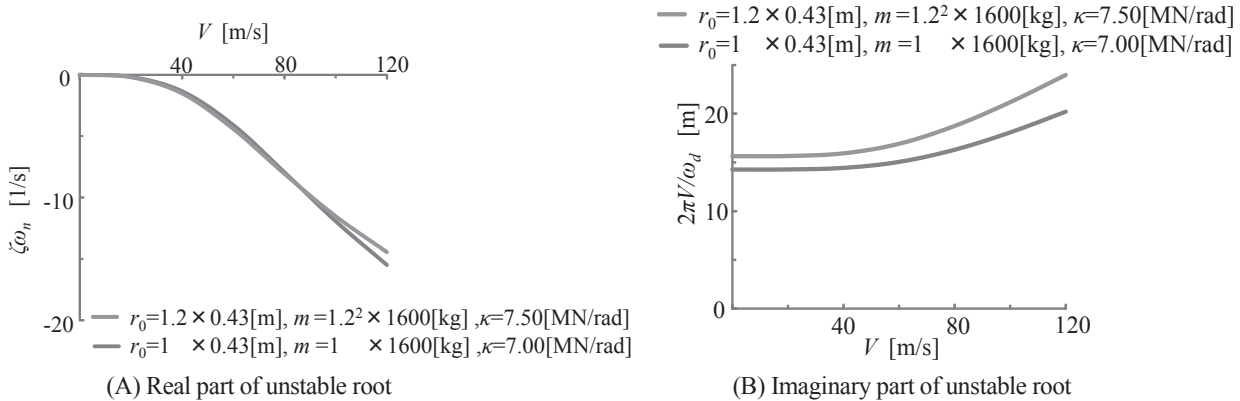


Fig.7 Influence of the radius of wheel r_0 related mass of the wheelset m (κ is defined as a function of m): This calculation is conducted with the values described in fig.2 except r_0 and m and κ . κ is determined by eq. (44). An increase in r_0 increased $\zeta\omega_n$ at $V > 87[\text{m/s}]$.

6. 結 言

慣性半径が軌間の半分に等しくかつ前後と左右のクリープ係数が等しいとの仮定をおいたときの輪軸の蛇行動の特性根の厳密解を定式化した。

特性根は次の2つの値によって変化する。1つはクリープ係数を輪軸の質量と車速との積で除したものである。

したがって、車速が一定な場合は、「(クリープ係数) / (輪軸の質量)」の値に左右される。もう1つは、幾何学的蛇行動の固有振動数である。

輪軸の質量が増加すると輪重が増加するので、クリープ係数も増加する。そこでクリープ係数が輪重の 2/3 乗に比例するとした場合の「(クリープ係数) / (輪軸の質量)」が減衰比に及ぼす影響を文字式で考察した。その結果、輪軸の質量を軽量化するほど負の減衰が減少(すなわち減衰が増加する)ことを指摘した。ただし、今回の計算諸元では車速 145[m/s]以上では、軽量化するほど減衰が低下する。

車輪の転がり半径を増加させると、幾何学的蛇行動の固有振動数が減少するほか、輪軸の質量が増加し、そのためクリープ係数も増加するので、「(クリープ係数) / (輪軸の質量)」も変化する。そこでこの影響を加味したときの転がり半径が減衰に及ぼす影響を調査し、車速 120[m/s]では大径化するほど減衰が増加することを指摘した。ただしある車速よりも低速側では小径化するほど減衰が増加する。この臨界車速は、今回の計算諸元では 87[m/s]であった。

本研究で定式化した減衰および固有振動数の式の近似精度を考察した。少なくとも「(慣性半径) / (軌間の半分)」が 0.95~1 かつ「(左右クリープ係数) / (前後クリープ係数)」が 0.8~1 の範囲では近似誤差が無視できると考えられる。

本研究は輪軸単体についての考察であったので、今後は台車レベルでの文字式による考察に発展させていきたいと考えている。

謝 辞

本研究にあたり、日本機械学会交通・物流部門鉄道技術委員会の委員の皆様にご指導を頂きました。ここに感謝の意を表します。

文 献

- 弘津哲二, 森田雄三, 岩崎文雄, 石田周二, 鉄道車両のだ行動のシミュレーション (第1報, 各部の遊間を考慮した力学モデルとその過渡現象), 日本機械学会論文集 C 編, Vol.50, No.450 (1984), pp.297-306.
- 道辻洋平, 鉄道車両の運動, 若手技術者のための「鉄道のダイナミクス」, No.15-76 (2015), pp.3-13.
- 小野寺忠, 矢野澄雄, 演習で学ぶ機械力学, 森北出版 (2014), p.62.
- 新誠一, 制御理論の基礎, 昭晃堂 (1996), pp.42-43.
- 酒井英樹, フォースコントロールにおいて不安定領域を有する車両の動的挙動についての基礎的研究, 日本機械学会論文集, Vol.81, No.823 (2015a), DOI: 10.1299/transjsme.14-00384.
- 酒井英樹, フォースコントロール下の固有振動数についての一考察, 日本機械学会論文集, Vol.81, No.824 (2015b), DOI: 10.1299/transjsme.14-00663.
- 振動工学ハンドブック編集委員会編, 振動工学ハンドブック, 養賢堂 (1991), pp.1160-1163.
- 須田義大, 藤岡健彦, 井口雅一, 高速走行性能からみた軸箱支持剛性の最適設計, 日本機械学会論文 C 編, Vol.52, No.475 (1986), pp.1003-1010.
- 日本機械学会編, 車両システムのダイナミクスと制御, 養賢堂 (2008), pp.116-127.
- 横瀬景司, 車輪とレールのすべり現象について, 日本機械学会論文集, Vol.37, No.304 (1971), pp.2407-2422.

References

- Hirotsu, T., Morita, Y., Iwasaki, H. and Ishida, S., Tetsudo sharyou no dakoudou no simyurasyon (Daiippou, Kakubu no yuukann wo kouryo shita rikigakumoderu to sono katogennsho), Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.50, No.450 (1984), pp.297-306 (in Japanese).
- Michitsuji, Y., Tetsudou sharyou no undou, Wakate gijyutsusha notameno "Tetsudou sharyou no dainamikusu", JSME No.15-76 (2015), pp.3-13 (in Japanese).
- Onodera, T. and Yano, S., Enshuu de manabu kikairikigaku, morikita (2014), p.62 (in Japanese).
- Shin, S., Basis of control theory, Shokodo (1996), pp.42-43 (in Japanese).
- Sakai, H., A fundamental study of dynamic behavior of vehicles with unstable region under force control, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.81, No.823 (2015a), DOI: 10.1299/transjsme.14-00384.
- Sakai, H., A consideration to natural frequencies under force control, Transactions of the JSME (in Japanese), Vol.81, No.824 (2015b), DOI: 10.1299/transjsme.14-00663.
- Suda, Y., Fujioka, T., and Iguchi M., Optimal design of primary stiffness form viewpoint of high speed performance for rail vehicles, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, Vol.52, No.475 (1986), pp.1003-1010(in Japanese).
- Shidoukougakuhandbukkuhenshuiinnkaihenn, Sindoukougakuhandbukku, Yokendo (1991), pp.1160-1163.
- The Japan Society of Mechanical Engineers ed., Sharyousitemu no dainamikkusu to seigy, Yokendo (2008), pp.116-127(in Japanese).
- Yokose, K., Sharin to reru no suberi gensho nituite, Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Vol.37, No.304 (1971), pp.2407-2422 (in Japanese).