

## 輪軸の動的な蛇行動についての理論的考察

### (クリープ係数と質量を考慮した固有振動数と減衰比の定式化)

酒井 英樹\*1

#### A Theoretical Study on Dynamical Weave of Wheel Set (Formulas of Natural Frequencies and Damping Ratios Taken Account of Creep Coefficient and Mass)

Hideki SAKAI\*1

In order to obtain insight about weave phenomenon of wheel set of rail vehicle, this paper starts with formulating its natural frequencies and damping ratios. Interpreting these formulas, this paper points out that larger ratio of creep coefficient normalized by wheel set mass reduces the weave at lower speed than a given speed and the smaller ratio does it at higher speed.

Keywords: Weave, Wheel Set, Natural Frequency, Damping Ratio

#### 1. はじめに

新幹線の利便性の一つは、速達性である。速達性をさらに向上させるための一つの方法に、運行最高速度の増加があげられる。しかし高速になるにつれて、蛇行動が生じやすくなり、蛇行動によって最高速度が制限される。

蛇行動のモードの一つに輪軸の蛇行動がある。そのために輪軸の蛇行動についての研究がおこなわれている。輪軸の蛇行動を表す特性方程式は、最小自由度のモデルでも微分演算子の4次式になるため、固有振動数の定式化が困難である。そこで、動的な効果を見捨てることで、固有振動数が定式化された幾何学的蛇行動の式を用いて大局を見通すか、固有振動数を数値的に解き、パラメータスタディを行う方法による研究方法が用いられている。

本論文は、より大局を見通しやすくすることを目的に、動的な効果を加味した場合の蛇行動の固有振動数を定式化する。次に、この式を吟味することにより、蛇行動が起りにくくなるための条件として、ある車速より低速側ではクリープ係数/質量比が大きく、高速側ではクリープ係数/質量比が小さいことを指摘する。

#### 2. 既往研究

##### 2.1 モデル

図1に示される輪軸のモデルを用いる。軌道は直線とし、軌道の中心線と車軸中心線との交点に原点  $o$  を設定する。軌道の方向に  $x$  軸を、枕木方向に  $y$  軸を、輪軸が左旋回する方向に正のアタック角  $\psi$  を定める。また輪軸の  $x$  軸方向の速度を  $V$  とする。

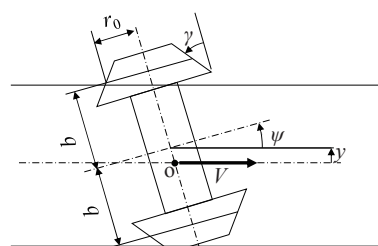


図1. 輪軸および軌道のモデルとその座標系

原稿受付 2016年4月25日

\*1 近畿大学工学部 ロボティクス学科 准教授, 次世代基盤技術研究所 准教授 (〒739-2116 東広島市高屋うめの辺1番)

E-mail sakai@hiro.kindai.ac.jp

次に、輪軸の性質を表す記号として、輪軸の質量を  $m$ 、 $y=0$  かつ  $\psi=0$  のときの車輪の転がり方向の回転半径を  $r_0$ 、踏面勾配を  $\gamma$ 、ヨー慣性半径を  $i$ 、レールと車輪との接触点から軌道の中心までの距離を  $b$ 、前後クリープ係数を  $\kappa_{11}$ 、左右クリープ係数を  $\kappa_{22}$  と記す。

このモデルの並進および回転についての運動方程式はそれぞれ次式で与えられる<sup>(1)</sup>。

$$m\ddot{y} = -\frac{2\kappa_{22}}{V}\dot{y} + 2\kappa_{22}\psi \quad (1)$$

$$mi^2\ddot{\psi} = -\frac{2\kappa_{11}b^2}{V}\dot{\psi} - \frac{2\kappa_{11}b\gamma}{r_0}y \quad (2)$$

## 2.2 固有振動数

準静的な解析として、慣性項を 0、すなわち式(1)、(2)それぞれの左辺を 0 とすると、式(1)、(2)から

$$\dot{y} + \frac{V^2\gamma}{br_0}y = 0 \quad (3)$$

の関係を得る。なお、この変形に際し

$$\dot{y} = V\dot{\psi} \quad (4)$$

の関係を用いた。式(3)から、慣性項が 0 の場合の固有振動数を  $\omega_{st}$  と記すと

$$\omega_{st} = \sqrt{\frac{V^2\gamma}{br_0}} \quad (5)$$

となる。これが準静的な場合の蛇行の固有振動数である。なおこの場合、減衰比は 0 である。

## 3. 慣性項を考慮した固有振動数の定式化

### 3.1 モデル

式(1)の両辺を  $m$  で、式(2)の両辺を  $m i^2$  でそれぞれ除すと、

$$\ddot{y} = -\frac{2\kappa_{22}}{m}\frac{1}{V}\dot{y} + \frac{2\kappa_{22}}{m}\psi \quad (6)$$

$$mi^2\ddot{\psi} = -\frac{2\kappa_{11}}{m}\left(\frac{b}{i}\right)^2\frac{1}{V}\dot{\psi} - \frac{2\kappa_{11}}{m}\left(\frac{b}{i}\right)^2\frac{\gamma}{r_0b}y \quad (7)$$

と書ける。そこで大局を見通しやすくするために、 $\kappa_{11}=\kappa_{22}$  と仮定する。ここでは、自動車ではコーナリングスティフネスと呼ばれる値であり、自動車の運動においては、コーナリングスティフネス自体よりも、ある輪のコーナリングスティフネスとその輪が負担する質量との比により意味があると指摘されている<sup>(2)</sup>。そこでクリープ係数を

$$\kappa_m \equiv \frac{2\kappa_{11}}{m} = \frac{2\kappa_{22}}{m} \quad (8)$$

と記す。さらに大局を見通しやすくするために  $b/i=1$  と仮定する。次に式(6)、(7)において、初期条件は全て 0 であるとしてラプラス変換をおこない、その特性方程式を求めると

$$s^4 + \frac{2\kappa_m}{V}s^3 + \frac{\kappa_m^2}{V^2}s^2 + \frac{\gamma\kappa_m^2}{r_0b} = 0 \quad (9)$$

となる。ここで  $s$  はラプラス演算子である。

### 3.2 速度無限大の場合の固有振動数

速度無限大の場合の固有振動数を  $\omega_{rinf}$  と記すと、式(9)において  $V \rightarrow \infty$  とすることで

$$\omega_{rinf} = \sqrt[4]{\frac{\gamma\kappa_m^2}{r_0b}} \quad (10)$$

となる。

### 3.3 一般的な速度の場合の固有振動数

この節では式(9)を、変数変換によって複二次式に分解する方法<sup>(3)</sup>を試みる。まず式(9)の  $s^3$  の項を消去するために、4 次方程式の解法である Ferrari の方法にならって、

$$z \equiv s + \frac{\kappa_m}{2V} \quad (11)$$

として定義される変数  $z$  を式(9)に代入すると、

$$z^4 + \frac{\kappa_m^2}{V^2}z^2 + \left(\frac{\kappa_m^4}{16V^4} + \frac{\gamma\kappa_m^2}{r_0b}\right) = 0 \quad (12)$$

となり、予想通り  $z^3$  の項が消えるだけでなく、予想外の効果として  $z^1$  の項も消えてしまう。これは、 $\kappa_{11}=\kappa_{22}$  と  $b/i=1$  を仮定したためである。

以上の結果、式(12)は  $z^2$  についての二次方程式になった。そこで、式(12)を、解の公式を用いて  $z^2$  について解くと  $z^2$  についての二つの解が求まり、さらにその正負の根号をとると  $z$  についての4つの解が求まる。それらの解を、式(11)の関係を用いると  $s$  についての4つの解が求まる。それらの解について、二次方程式の解と係数の関係を適用する<sup>3)</sup>と、次に示される二つの特性方程式が得られる。

$$s^2 + 2\zeta_1\omega_{n1} + \omega_{n1}^2 = 0 \quad (13)$$

$$s^2 + 2\zeta_2\omega_{n2} + \omega_{n2}^2 = 0 \quad (14)$$

ここで

$$\zeta_1\omega_{n1} = \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\omega_{st}^2\left(\frac{2V}{\kappa_m}\right)^2}} \right] \frac{\kappa_m}{2V} \quad (15)$$

$$\omega_{n1} = \sqrt{1 - \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\omega_{st}^2\left(\frac{2V}{\kappa_m}\right)^2}} + \sqrt{1 + 4\omega_{st}^2\left(\frac{2V}{\kappa_m}\right)^2}} \frac{\kappa_m}{2V} \quad (16)$$

$$\zeta_2\omega_{n2} = \left[ 1 + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4\omega_{st}^2\left(\frac{2V}{\kappa_m}\right)^2}} \right] \frac{\kappa_m}{2V} \quad (17)$$

$$\omega_{n2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\omega_{st}^2\left(\frac{2V}{\kappa_m}\right)^2}} + \sqrt{1 + 4\omega_{st}^2\left(\frac{2V}{\kappa_m}\right)^2}} \frac{\kappa_m}{2V} \quad (18)$$

である。これらが、一般的な速度における固有振動数と減衰比である。

## 4. 考察

### 4.1 安定性

式(15)右辺の外側の根号内は1よりも大きい。そのため、 $\zeta_1\omega_{n1}$ は常に負である。したがって、式(13)の極によって、なんらかの外乱や初期条件が0でない場合、 $y$  や  $\psi$  は振動的に発散する。一方、式(17)は常に正であるため、式(14)の極によって減衰する。そこで、蛇行動による不安

定原因として以後、式(13)に注目する。

### 4.2 固有振動数と減衰比を支配する変数

式(13)は、 $\omega_{st}^2$  と  $\kappa_m/(2V)$  の2変数に支配されている。また、これらの項は、 $1 + 4\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2$  の形式で根号に含まれている。そのため、 $4\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2$  が固有振動数や減衰比に及ぼす影響は、 $4\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2$  と1との大小関係によって変化することが予想される。

そこで、 $4\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2=1$  となる  $V$  を  $V_0$  と記し、次節以降では  $\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2$  の性質を次の2つの場合に分ける。

- 1)  $V \ll V_0$  の場合.
- 2)  $V \gg V_0$  の場合.

### 4.3 $V \ll V_0$ の場合の発散の低減策

$V \ll V_0$  の場合、 $1 \gg 4\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2$  だから、 $4\omega_{st}^2(2V/\kappa_m)^2$  を微小量として、式(13)を1次のマクローリン展開を行うと、次式を得る。

$$s^2 + 2\zeta_{1Low}\omega_{st}s + \omega_{st}^2 = 0 \quad (19)$$

ここで

$$\zeta_{1Low}\omega_{st} = -\omega_{st}^2 \frac{V}{\kappa_m} \quad (20)$$

である。発散の程度を軽減するためには、振動の包絡線の発散の程度を表す  $\zeta_{1Low}\omega_{st}$  が(正側に)大きい方が良いから、 $\kappa_m$  が大きいほど、式(5)で定義される  $\omega_{st}$  が小さいほど発散の程度が軽減される。

### 4.4 $V \gg V_0$ の場合の発散の低減策

式(13)を  $V \rightarrow \infty$  の極限を取ると

$$s^2 + 2\zeta_{1High}\omega_{1High}s + \omega_{1High}^2 = 0 \quad (21)$$

となる。ここで

$$\zeta_{1High}\omega_{1High} = -\frac{1}{2} \sqrt[4]{4\frac{\gamma\kappa_m^2}{r_0b}} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1High} &= \sqrt[4]{\frac{\gamma\kappa_m^2}{r_0b}} \\ &= \omega_{Vinf} \end{aligned} \quad (23)$$

である。振動的発散時の時系列波形の包絡線の発散の程度を表す  $\zeta_{1High}\omega_{1High}$  に注目し、式(22)を  $\omega_{st}$  を用いて変形すると

$$\zeta_{1High}\omega_{1High} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega_{st}\frac{\kappa_m}{V}} \quad (24)$$

となる。したがって  $V \gg V_0$  の場合、発散の程度を抑えるための対策は、 $\kappa_m$  をより小さく、 $\omega_{st}$  をより小さくすることが有効であると考えられる。

## 5. まとめ

本論文は、輪軸の蛇行動を定式化し、蛇行動の発散現象を記号解で表した。つぎのこの式を考察することにより、発散の低減法として、ある車速よりも低速側ではクリーブ係数/輪軸質量を大きく、高速側では小さくすることが有効であることを指摘した。

## 謝辞

本研究にあたり、茨城大学の道辻准教授のご指導を頂きました。お礼を申し上げます。

## 参考文献

- (1) 日本機械学会編, “車両システムのダイナミクスと制御”, (1999-2), pp.116-127.
- (2) 酒井英樹, “自動車の平面運動におけるヨー角速度進み時定数についての力学的考察”, 日本機械学会論文集(C編), 79巻 801号 (2013-5), pp.1681-1692.
- (3) 酒井英樹, “フォースコントロールにおいて不安定領域を有する車両の動的挙動についての基礎的研究”, 日本機械学会論文集(C編), 81巻 823号 (2015-3), pp.14-00384.